Mathematik

Geometrie
Trigonometrie
Vektorgeometrie

Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Engineering & Architecture

Diese Zusammenfassung basiert mitunter auf den Skripts von Josef Schuler, ZS HSLU T&A.

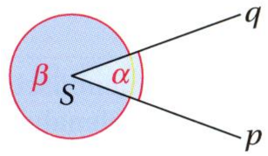
Inhaltsverzeichnis

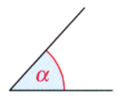
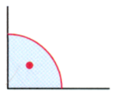
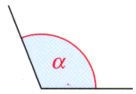
1. Planimetrie

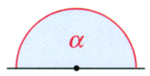
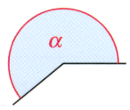
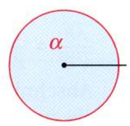
1.1. Winkel

Zwei Strahlen p und q mit gemeinsamen Anfangspunkt S bilden Winkel der Grösse α bzw. β.

Der **Punkt S** nennt man **Scheitelpunkt**, die **Strahlen p, q Schenkel** des Winkels.

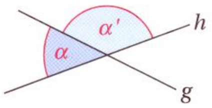
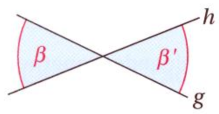


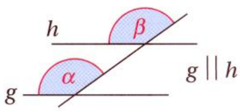
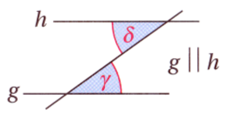
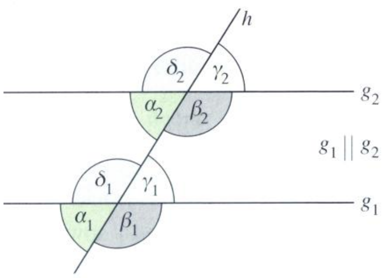
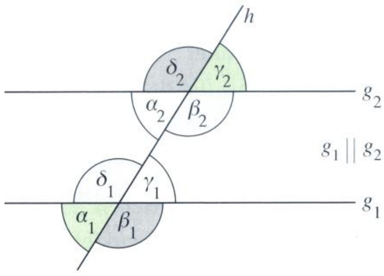
Nullwinkel	spitzer Winkel	rechter Winkel	stumpfer Winkel
			
α = 0°	**0° < α < 90°**	**α = 90°**	**90° < α < 180°**

gestreckter Winkel	überstumpfer Winkel	Vollwinkel
		
α = 180°	**180° < α < 360°**	**α = 360°**

1.1.1. Winkel an Geraden

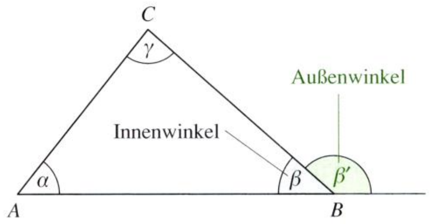
Zwei Geraden g und h, die sich schneiden, bilden vier Winkel miteinander.

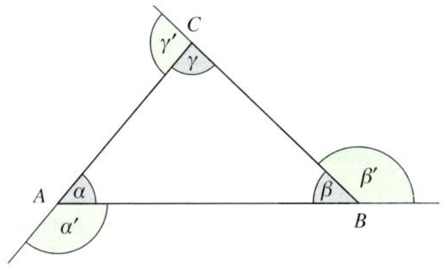
Nebenwinkel		**Scheitelwinkel**	
Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.	 $\alpha + \alpha' = 180°$	Scheitelwinkel sind gleich gross.	 $\beta = \beta'$

Stufenwinkel		**Wechselwinkel**	
Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind gleich gross.	 $\alpha = \beta$	Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind gleich gross.	 $\gamma = \delta$
$\alpha_1 = \alpha_2$ $\beta_1 = \beta_2$ $\gamma_1 = \gamma_2$ $\delta_1 = \delta_2$		$\alpha_1 = \gamma_2$ $\beta_1 = \delta_2$ $\gamma_1 = \alpha_2$ $\delta_1 = \beta_2$	

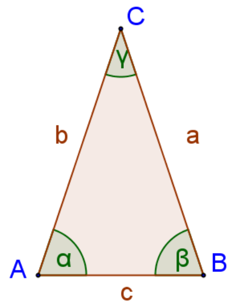
1.2. Dreieck

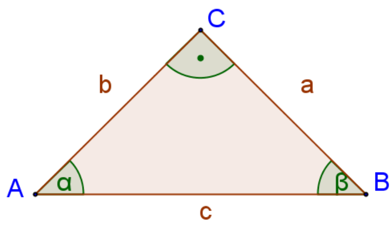
1.2.1. Winkel am Dreieck

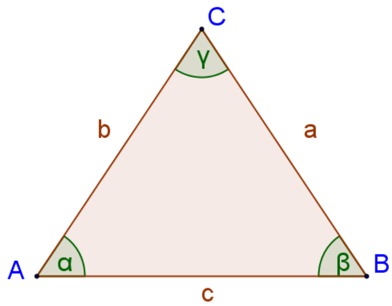
Innenwinkelsatz		
Die Summe der **Innenwinkel** eines Dreiecks beträgt **180°**.	$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=180^\circ}$	

Aussenwinkelsatz		
Die Summe der **Aussenwinkel** eines Dreiecks beträgt **360°**. Ein Aussenwinkel ist so gross wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.	$\boldsymbol{\alpha'+\beta'+\gamma'=360^\circ}$ $\boldsymbol{\alpha'=\beta+\gamma}$ $\boldsymbol{\beta'=\alpha+\gamma}$ $\boldsymbol{\gamma'=\alpha+\beta}$	

1.2.2. Spezielle Dreiecke

Gleichschenkliges Dreieck		
Im gleichschenkligen Dreieck sind **zwei Seiten gleich lang** und die beiden **Basiswinkel gleich gross**.	$\boldsymbol{\alpha=\beta}$ $\boldsymbol{\gamma=180^\circ-2\alpha}$ $\boldsymbol{A=\frac{c}{2}\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}}$ $\boldsymbol{A=\frac{c}{2}\cdot h_c}$	

Rechtwinkliges Dreieck		
Dreiecke mit **einem rechten Winkel** (90°) heissen **rechtwinklige Dreiecke**. Die **längste Seite c** im rechtwinkligen Dreieck heißt **Hypotenuse** die beiden **anderen (a, b)** werden **Katheten** genannt.	$\boldsymbol{\alpha+\beta=90^\circ}$ $\boldsymbol{\gamma=90^\circ}$ $\boldsymbol{A=\frac{a\cdot b}{2}}$	

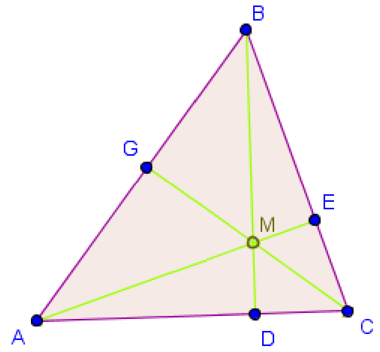
Gleichseitiges Dreieck		
Im gleichseitigen Dreieck sind alle drei **Seiten gleich lang** und alle drei **Winkel gleich gross**. (60°)	$\boldsymbol{\alpha=\beta=\gamma=60^\circ}$ $\boldsymbol{h=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}}$ $\boldsymbol{A=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}}$	

1.2.3. Besondere Linien im Dreieck

Höhenschnittpunkt

Die **Höhen** erhält man, indem man von den Ecken aus die Lote auf die gegenüberliegenden Seiten fällt.

Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem **Höhenschnittpunkt M**.

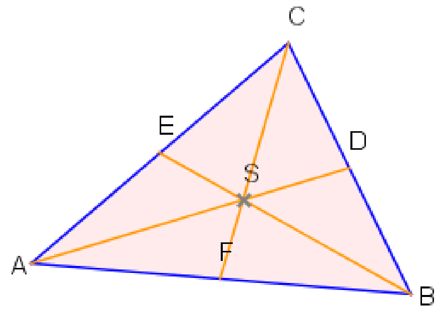


Seitenhalbierende

Verbindet man eine Ecke mit dem Mittelpunkt der gegenüber liegenden Seite, erhält man eine **Seitenhalbierende**.

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem **Schwerpunkt S**.

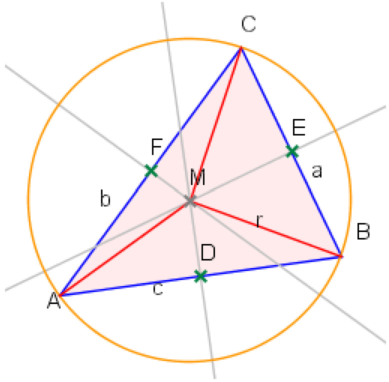
Dieser teilt die Seitenhalbierenden im **Verhältnis 2:1**



Mittelsenkrechte / Umkreis

Bildet man in einem Dreieck von jeder Seite den Mittelpunkt und errichtet darauf ein Senkrechte, so erhält man die **Mittelsenkrechten** des Dreiecks.

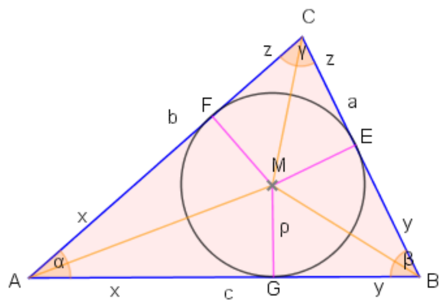
Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M. Dieser Punkt ist der **Mittelpunkt des Umkreises** (des Kreises, auf dem die Eckpunkte des Dreiecks liegen).



Winkelhalbierende / Inkreis

Unter den **Winkelhalbierenden** versteht man diejenigen Geraden, welche die Innenwinkel des Dreiecks halbieren.

Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem **Mittelpunkt des Inkreises**.



Der Schnittpunkt der **Seitenhalbierenden** ist der **Schwerpunkt des Dreiecks**.

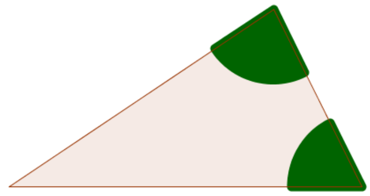
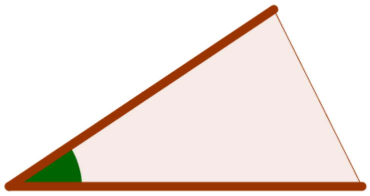
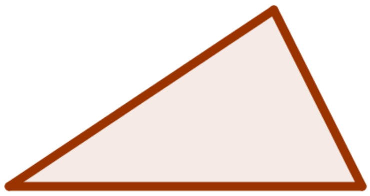
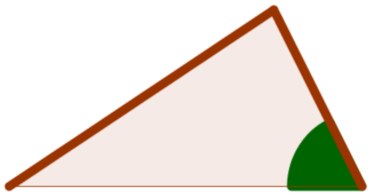
Der Schnittpunkt der **Mittelsenkrechten** ist der **Mittelpunkt des Umkreises**.

Der Schnittpunkt der **Winkelhalbierenden** ist der **Mittelpunkt des Inkreises**.

1.2.4. Ähnlichkeit von Dreiecke

Zwei Figuren F und F‘ heissen **ähnlich**, wenn sie massstäbliche **Vergrösserungen** bzw. **Verkleinerungen** voneinander sind.
Man schreibt: $F \sim F'$

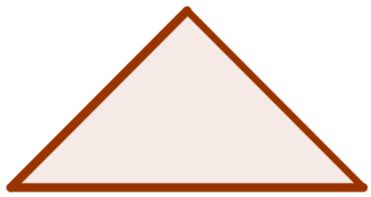
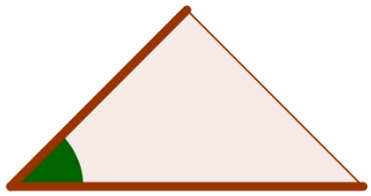
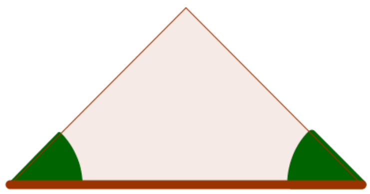
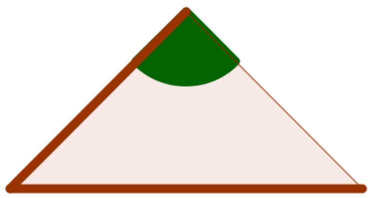
k = Ähnlichkeitsfaktor, $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke			
1.	Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Grössen zweier gleich liegender Winkel übereinstimmen.	z.B.: $\boldsymbol{\beta = \beta'}$ $\boldsymbol{\gamma = \gamma'}$	
2.	Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Längenverhältnisse zweier entsprechender Seiten und die Grösse des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen.	z.B.: $\mathbf{b : b' = k}$ $\mathbf{c : c' = k}$ $\boldsymbol{\alpha : \alpha'}$	
3.	Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Längenverhältnisse aller drei Seiten übereinstimmen.	z.B.: $\mathbf{a : a' = k}$ $\mathbf{b : b' = k}$ $\mathbf{c : c' = k}$	
4.	Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Längenverhältnisse zweier Seiten und der Grösse des Winkels übereinstimmen, welcher der grösseren Seite gegenüber liegt.	z.B.: $\mathbf{a : a' = k}$ $\mathbf{b : b' = k}$ $\boldsymbol{\gamma = \gamma'}$ (b > a)	

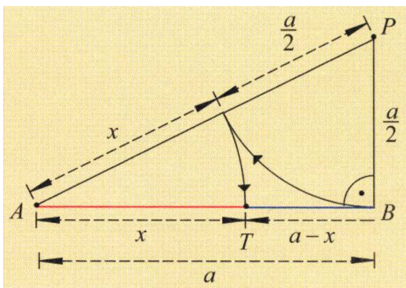
- In ähnlichen Figuren sind entsprechende Winkel gleich gross.
- Alle Strecken der Figur F‘ sind genau k-mal so lange wie entsprechende Strecken der Figur F. Entsprechende Strecken stehen also im gleichen Längenverhältnis zueinander.
  Das gemeinsame Längenverhältnis k ist der **Ähnlichkeitsfaktor**.
- Der Flächeninhalt der Figur F‘ ist genau k^2-mal so gross, wie der der Figur F:
  $\mathbf{A' = k^2 \cdot A}$

1.2.5. Kongruenz von Dreiecken

Zwei ebene Figuren F und F‘ heissen **kongruent** (deckungsgleich), wenn sie **die gleiche Form** und die **gleiche Grösse** haben.
Man schreibt: F ≅ F‘

Kongruenzsätze für Dreiecke		
1. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen aller ihrer Seiten übereinstimmen.	**SSS** Seite, Seite, Seite	
2. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier Seiten und der Grösse des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels übereinstimmen.	**SWS** Seite, Winkel, Seite	
3. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge einer Seite und den Grössen der beiden anliegenden Winkel übereinstimmen.	**WSW** Winkel, Seite, Winkel	
4. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier Seiten und der Grösse des Winkels, welcher der grösseren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen.	**SsW** Seite, Seite, Winkel	

1.2.6. Goldener Schnitt

Natürliche innere Teilung		
Ein **Punkt T** teilt die **Strecke a** nach dem **Goldenen Schnitt**, wenn sich die **kürzere** Teilstrecke zur **längeren** gleich verhält, wie die **längere** Teilstrecke zur **ganzen Strecke**. Beim Goldenen Schnitt heisst die **längere Teilstrecke x Major**. Die **kürzere Teilstrecke a - x** heisst **Minor**.	**(a – x) : x = x : a** $\mathbf{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \boldsymbol{a}$ $\mathbf{x} \approx \mathbf{0.6180a}$ $\mathbf{a} - \mathbf{x} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \boldsymbol{a}$ $\mathbf{a} - \mathbf{x} \approx \mathbf{0.3820a}$	

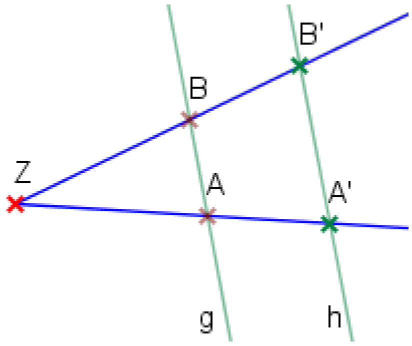
1.2.7. Strahlensätze

Gehen von einem Punkt S zwei Strahlen aus und werden diese Strahlen von zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten, entsteht eine Strahlensatzfigur.

1. Strahlensatz (Strahlenabschnitten)

Werden zwei von einem gemeinsamen Punkt Z ausgehende Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die **Längen** der **Abschnitte** auf dem **einen Strahl** wie die **Längen** der **entsprechenden Abschnitte** auf dem **anderen Strahl**.

$$\frac{\overline{\mathbf{ZA}}}{\overline{\mathbf{ZA'}}} = \frac{\overline{\mathbf{ZB}}}{\overline{\mathbf{ZB'}}}$$

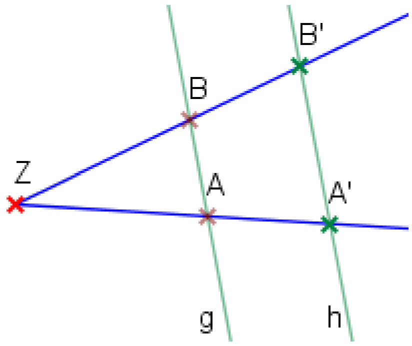


Erweiterung des 1. Strahlensatzes

Der 1. Strahlensatz **gilt** nicht nur für die Streckenabschnitte, die im Schnittpunkt Z beginnen, sondern für **alle entsprechenden Abschnitte auf den Strahlen**

$$\frac{\overline{\mathbf{ZA}}}{\overline{\mathbf{AA'}}} = \frac{\overline{\mathbf{ZB}}}{\overline{\mathbf{BB'}}}$$

$$\frac{\overline{\mathbf{ZA'}}}{\overline{\mathbf{AA'}}} = \frac{\overline{\mathbf{ZB'}}}{\overline{\mathbf{BB'}}}$$

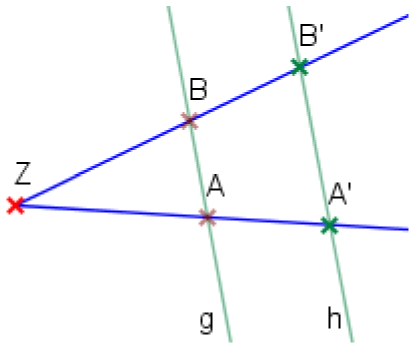


2. Strahlensatz (Strahlen- und Parallelenabschnitten)

Werden zwei von einem gemeinsamen Punkt Z ausgehende Strahlen durch zwei parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die **Längen** der von Z ausgehenden **Abschnitte** auf den **Strahlen** wie die **Längen** der **zugehörigen Abschnitte** auf den **Parallelen**.

$$\frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\overline{\mathbf{A'B'}}} = \frac{\overline{\mathbf{ZA}}}{\overline{\mathbf{ZA'}}}$$

$$\frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\overline{\mathbf{A'B'}}} = \frac{\overline{\mathbf{ZB}}}{\overline{\mathbf{ZB'}}}$$

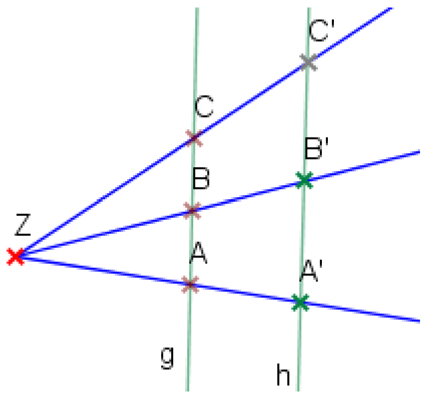


3. Strahlensatz (Parallelenabschnitten)

Dieser Strahlensatz setzt im Gegensatz zu den ersten beiden Strahlensätzen mindestens drei Strahlen voraus und kann leicht aus den vorhergehenden hergeleitet werden.

Je **zwei Abschnitte** auf den **Parallelen**, die **einander entsprechen**, stehen in **gleichem Verhältnis zueinander**.

$$\frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\overline{\mathbf{BC}}} = \frac{\overline{\mathbf{A'B'}}}{\overline{\mathbf{B'C'}}}$$



Ergänzung zu den Strahlensätzen

Die Aussagen der **Strahlensätze gelten auch** dann, wenn die schneidenden **Parallelen** auf **verschiedenen Seiten** des Ausgangspunktes der Strahlen **liegen**.

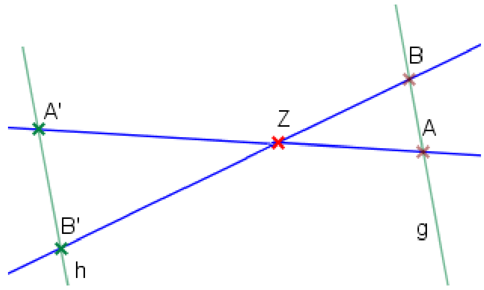
1. Strahlensatz:

$$\frac{\overline{\mathbf{ZA}}}{\overline{\mathbf{ZA'}}} = \frac{\overline{\mathbf{ZB}}}{\overline{\mathbf{ZB'}}}$$

2. Strahlensatz:

$$\frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\overline{\mathbf{A'B'}}} = \frac{\overline{\mathbf{ZA}}}{\overline{\mathbf{ZA'}}}$$

$$\frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\overline{\mathbf{A'B'}}} = \frac{\overline{\mathbf{ZB}}}{\overline{\mathbf{ZB'}}}$$



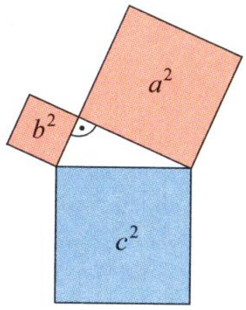
1.2.8. Satz des Phytagoras

Satz von Phytagoras

Der Satz des Pythagoras stellt einen einfachen Zusammenhang zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks her.

In jedem **rechtwinkligen Dreieck** ist das **Quadrat** über der **Hypotenuse** gleich der **Summe** der **Quadrate** über den **Katheten**.

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$$



Satz von Phytagoras (Herleitung)

Das grosse Quadrat mit der Seitenlänge c lässt sich in ein kleines Quadrat mit der Seitenlänge (a – b) und in vier rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und b zerlegen.

Der Flächeninhalt des grossen Quadrates lässt sich auf zwei verschiedene Weisen berechnen:

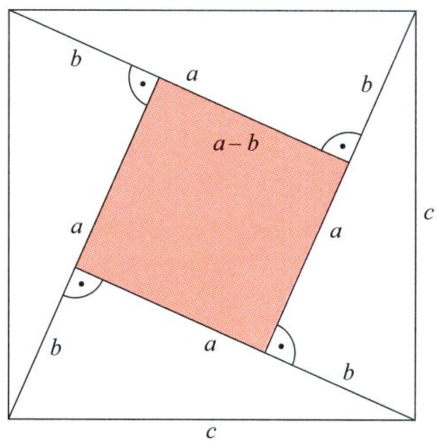
$$\mathrm{A = c^2 \quad und \quad A = (a-b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}}$$

Durch Gleichsetzen und Umformen erhalten wir:

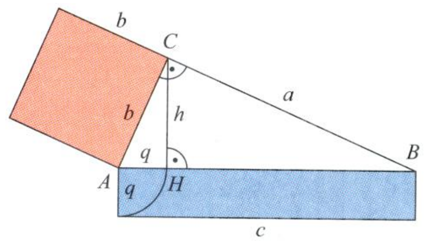
$$\mathrm{c^2 = (a-b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}}$$

$$\mathrm{c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab}$$

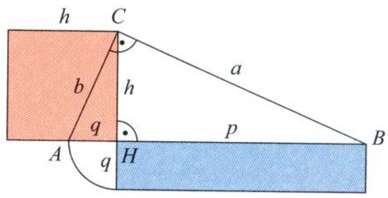
$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$$



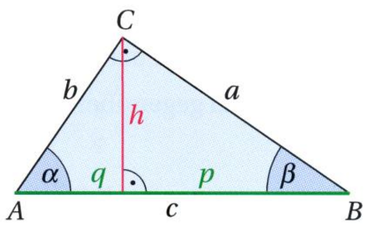
1.2.9. Kathetensatz des Euklid

Kathetensatz		
Im rechtwinkligen Dreieck hat das **Quadrat** über einer **Kathete** den gleichen **Flächeninhalt** wie das **Rechteck** aus der **Hypotenuse** und dem der Katheten anliegen **Hypotenusen Abschnitt**.	$\mathbf{a^2 = c \cdot p}$ $\mathbf{b^2 = c \cdot q}$	

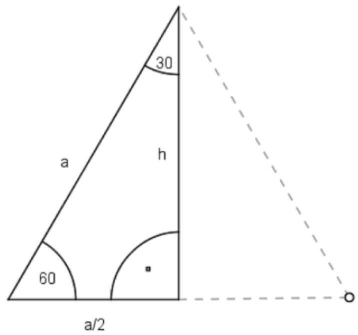
1.2.10. Höhensatz des Euklid

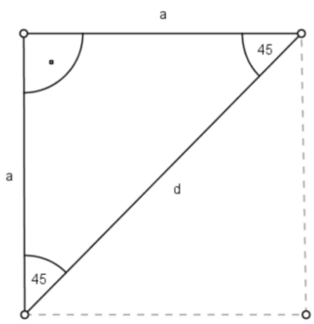
Höhensatz		
Im rechtwinkligen Dreieck hat das **Quadrat** über der **Höhe** auf die Hypotenuse den gleichen **Flächeninhalt** wie das **Rechteck** aus den **Hypotenusen Abschnitten**.	$\mathbf{h^2 = p \cdot q}$	

1.2.11. Flächensatz des Heron

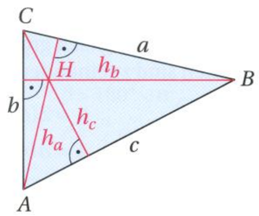
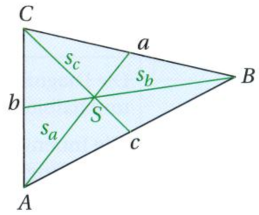
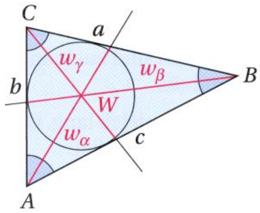
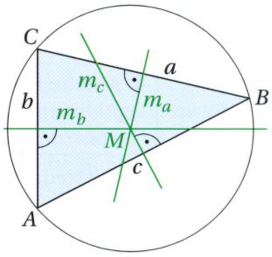
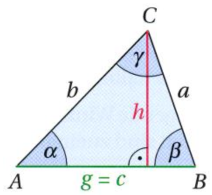
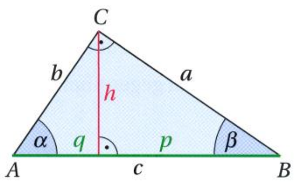
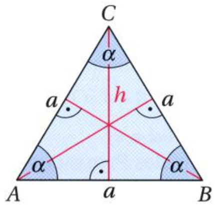
Satz des Heron	
Für den Flächeninhalt A eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b und c gilt: $\mathbf{A = \sqrt{s(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}$ wobei $\mathbf{s = \frac{a+b+c}{2}}$ der halbe Dreiecksumfang ist.	

1.2.12. Spezielle Dreiecke (30°-60° / 45°-45°)

30° - 60° - Dreieck		
Dieses Dreieck erhalten wir, wenn wir ein gleichseitiges Dreieck halbieren. Mit dem Satz von Pythagoras lassen sich deshalb aus einer Seite alle anderen Seiten und der Flächeninhalt berechnen.	$\mathbf{h = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}}$ $\mathbf{A = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{8}}$	

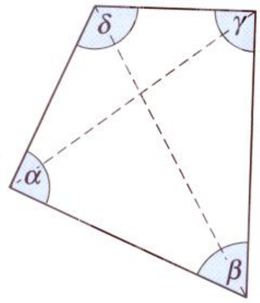
45° - 45° - Dreieck		
Dieses rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck erhalten wir, wenn wir ein Quadrat entlang der Diagonalen halbieren. Mit dem Satz von Pythagoras lassen sich deshalb aus einer Seite alle anderen Seiten und der Flächeninhalt berechnen.	$\mathbf{d = \sqrt{2} \cdot a}$ $\mathbf{A = \frac{a^2}{2}}$	

1.2.13. Dreiecke im Überblick

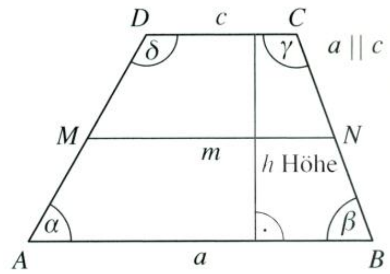
Begriff	Veranschaulichung	Zusammenhänge / Formeln
Höhen (h_a; h_b; h_c)		Die Höhen schneiden einander im **Höhenschnittpunkt H**. $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$
Seitenhalbierende (s_a; s_b; s_c)		Der **Schwerpunkt S** teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1. $s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}$
Winkelhalbierende (w_α; w_β; w_γ)		Die Winkelhalbierenden schneiden einander im **Inkreismittelpunkt W**. $w_\alpha = \frac{2}{b+c} \cdot \sqrt{b \cdot c \cdot s \cdot (s-a)}$ mit $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{u}{2}$
Mittelsenkrechte (m_a; m_b; m_c)		Die Mittelsenkrechten schneiden einander im **Umkreismittelpunkt M**.
allgemeines (beliebiges) Dreieck		$u = a + b + c$ $A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot r}$ (r = Umkreisradius) $A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ $\left(\text{mit } s = \frac{u}{2}\right)$
rechtwinkliges Dreieck		$c^2 = a^2 + b^2$ $h^2 = p \cdot q$ $a^2 = c \cdot p$ $b^2 = c \cdot q$ $A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2}$
gleichseitiges Dreieck		$u = 3 \cdot a$ $\alpha = 60°$ $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ $A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

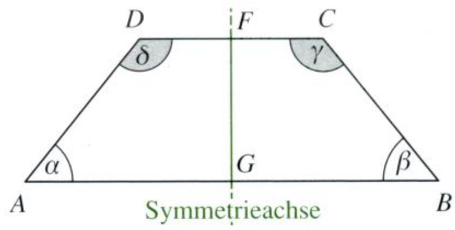
1.3. Viereck / Vielecke

1.3.1. Winkel am Viereck (bzw. Vieleck)

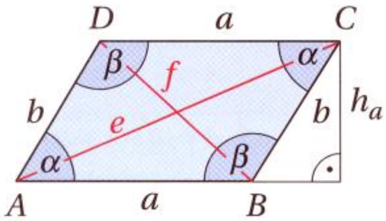
Innenwinkelsatz		
Die Summe der **Innenwinkel** eines Vierecks beträgt **360°**. Verallgemeinerung: Die Summe der InnenWinkel eines n-Ecks beträgt (n-2) · 180°	$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°}$ Bsp. Viereck: (4-2) · 180° = 360°	

1.3.2. Trapez

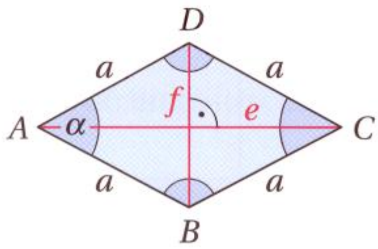
Trapez		
Sind in einem Viereck zwei Seiten parallel, so heisst es **Trapez**. Die **parallelen Seiten** sind die **Grundlinien**, die **nicht parallelen Seiten** sind die **Schenkel**. Verbindet man die Mittelpunkte M und N der Schenkel eines Trapezes durch eine Strecke, erhält man die **Mittellinie** m.	**a || c** $\boldsymbol{\alpha + \delta = 180°}$ $\boldsymbol{\beta + \gamma = 180°}$ $\mathbf{m = \frac{a+c}{2}}$ $\mathbf{A = m \cdot h = \frac{(a+c)\cdot h}{2}}$	

Gleichschenkliges Trapez		
Hat ein Trapez **gleichlange Schenkel**, so ist es ein **gleichschenkliges Trapez**. Sind G und F die Mitten der Grundlinien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, so ist die Gerade FG **Symmetrieachse**.	$\boldsymbol{\alpha = \beta}$ $\boldsymbol{\gamma = \delta}$ $\mathbf{\lvert\overline{DF}\rvert = \lvert\overline{FC}\rvert}$ $\mathbf{\lvert\overline{AG}\rvert = \lvert\overline{GB}\rvert}$	

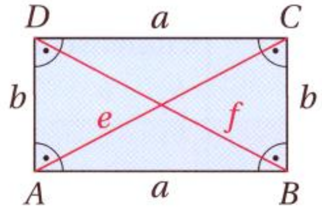
1.3.3. Parallelogramm (Rhomboid)

Parallelogramm (Rhomboid)		
Ein Viereck, in dem alle **gegenüberliegenden Seiten** zueinander **Parallel** sind, nennt man **Parallelogramm**. Die einer Seite **anliegenden Winkel ergänzen einander** zu **180°**. **Gegenüberliegende Winkel** sind **gleich gross**. Die **Diagonalen halbieren einander**.	**a ||c und b || d** **a = c und b = d** $\boldsymbol{\alpha + \beta = 180°}$ $\boldsymbol{\beta + \gamma = 180°}$ $\boldsymbol{\gamma + \delta = 180°}$ $\boldsymbol{\delta + \alpha = 180°}$ $\boldsymbol{\alpha = \gamma}$ $\boldsymbol{\beta = \delta}$	

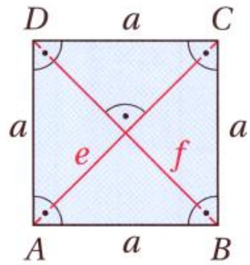
1.3.4. Raute (Rhombus)

Die Raute (Rhombus)		
Ein Parallelogramm, dessen **Seiten alle gleichlang** sind, heisst **Raute** oder auch **Rhombus**. Die einer Seite **anliegenden Winkel ergänzen einander** zu **180°**. **Gegenüberliegende Winkel** sind **gleich gross**. Die **Diagonalen halbieren einander** und stehen **senkrecht** aufeinander.	**a ||c und b || d** **a = c und b = d** $\boldsymbol{\alpha + \beta = 180°}$ $\boldsymbol{\beta + \gamma = 180°}$ $\boldsymbol{\gamma + \delta = 180°}$ $\boldsymbol{\delta + \alpha = 180°}$ $\boldsymbol{\alpha = \gamma}$ $\boldsymbol{\beta = \delta}$	

1.3.5. Rechteck

Rechteck		
Ein Parallelogramm, in dem **alle Winkel gleich gross** sind, ist ein **Rechteck**. **Alle** vier **Innenwinkeln** sind **90°** Die **Diagonalen** sind **gleich lang** und **halbieren sich**.	$\boldsymbol{\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°}$ $\boldsymbol{e = f = \sqrt{a^2 + b^2}}$ **u = 2(a + b)** **A = a · b**	

1.3.6. Quadrat

Quadrat		
Ein **Quadrat** ist ein Parallelogramm mit **vier gleich grossen**, also **rechten Winkeln** und **vier gleich langen Seiten**. **Alle** vier **Innenwinkeln** sind **90°** Die **Diagonalen** sind **gleich lang**, stehen **senkrecht** aufeinander und **halbieren sich**.	$\boldsymbol{\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°}$ $\boldsymbol{e = f = a \cdot \sqrt{2}}$ **u = 4a** **A = a²**	

1.3.7. Drachenviereck

Drachenviereck

Hat ein Viereck z**wei Paar gleich lange benachbarte Seiten**, heisst es **Drachenviereck**.

Eine **Diagonale** (f) ist die **Symmetrieachse**.

Die **Diagonalen** stehen **senkrecht** aufeinander. Die **Diagonale**, die **Symmetrieachse** ist, **halbiert die andere Diagonale**.

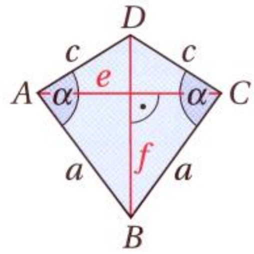
Die von den **unterschiedlich langen Seiten eingeschlossenen Winkel sind gleich gross**.

a = b und c = d

$$\alpha = \gamma$$

u = 2a + 2c

$$A = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} = \frac{e \cdot f}{2}$$



1.3.8. Sehnenviereck

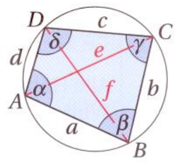
Sehnenviereck

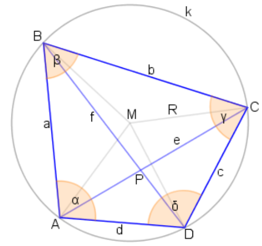
Ein **Viereck**, dessen vier **Eckpunkte** auf einem **Kreis liegen**, nennt man **Sehnenviereck**.

Die vier Seiten sind **Sehnen**

Gegenüberliegende Winkel ergänzen sich zu **180°.**

$$\alpha + \gamma = 180°$$
$$\beta + \delta = 180°$$





1.3.9. Tangentenviereck

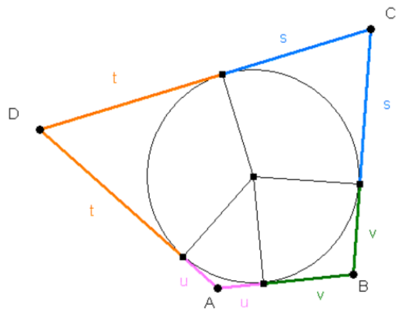
Tangentenviereck

Ein **Viereck**, **in** das sich **ein Kreis** zeichnen lässt, der alle **vier Seiten berührt**, nennt man **Tangentenviereck**.

Die Viereckseiten sind **Tangenten**

Die **Summe gegenüberliegenden Seiten** sind **gleich gross**.

a + c = b + d



1.3.10. Regelmässige Vielecke

Regelmässige Vielecke

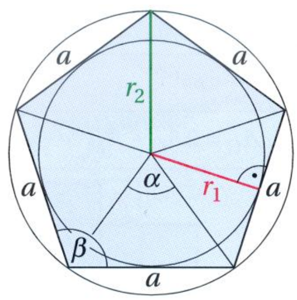
Ein **Vieleck** ist **regelmässig**, wenn **alle Seiten gleich lang** und
alle Innenwinkel gleich gross sind.

Das Lot auf eine Seite des Polygons durch den Kreismittelpunkt teilt die Seite in zwei gleich grosse Teile.

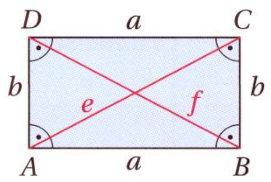
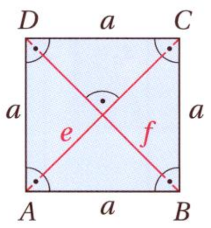
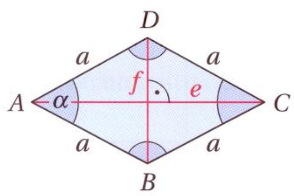
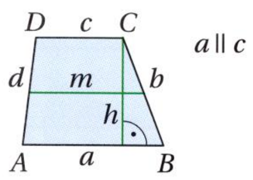
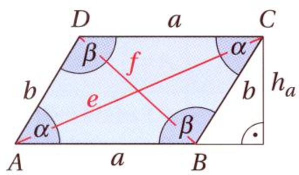
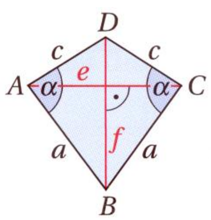
$$\alpha = \frac{360°}{n}$$

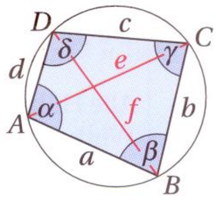
$$\beta = 180° - \alpha$$

$$\beta = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$



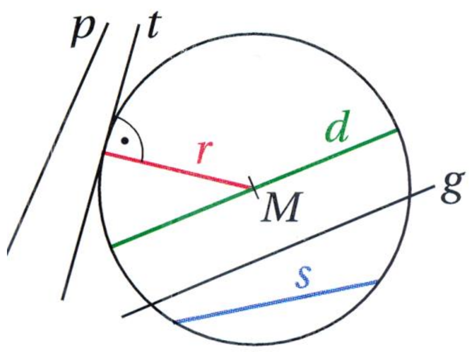
1.3.11. Vierecke im Überblick

Begriff	Veranschaulichung	Zusammenhänge / Formeln
Rechteck		Die Diagonalen sind gleich lang und halbieren einander. Alle Innenwinkel sind gleich gross (90°). Gegenüberliegende Seiten sind zueinander parallel und gleichlang. $\mathbf{e = f = \sqrt{a^2 + b^2}}$ $\mathbf{u = 2 \cdot (a + b)}$ $\mathbf{A = a \cdot b}$
Quadrat		Die Diagonalen sind zueinander senkrecht, gleich lang und halbieren einander. Alle Innenwinkel sind gleich gross (90°). Alle Seiten sind gleich lang. $\mathbf{e = f = a \cdot \sqrt{2}}$ $\mathbf{u = 4 \cdot a}$ $\mathbf{A = a^2 = \frac{e^2}{2}}$
Rhombus (Raute)		Die Diagonalen sind zueinander senkrecht und halbieren einander. Alle Seiten sind gleich lang. Gegenüberliegende Seiten sind zueinander parallel. $\mathbf{e^2 = 4 \cdot a^2 - f^2}$ $\mathbf{u = 4 \cdot a}$ $\mathbf{\alpha + \beta = 180°}$ $\mathbf{A = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot h_a}$ $\mathbf{A = a^2 \cdot \sin\alpha}$
Trapez		Mindestens zwei Seiten sind zueinander parallel. m = Mittelparallel (Mittellinie) $\mathbf{m = \frac{a + c}{2}}$ $\mathbf{u = a + b + c + d}$ $\mathbf{\alpha + \delta = 180°}$ $\mathbf{A = m \cdot h = \frac{a + c}{2} \cdot h}$ $\mathbf{\beta + \gamma = 180°}$
Parallelogramm (Rhomboid)		Die Diagonalen halbieren einander. Gegenüberliegende Winkel sind gleich gross. Gegenüber-liegende Seiten sind zueinander parallel und gleich lang. $\mathbf{2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2}$ $\mathbf{u = 2(a + b)}$ $\mathbf{\alpha + \beta = 180°}$ $\mathbf{A = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin\alpha}$
Drachenviereck		Die Diagonalen sind zueinander senkrecht. Mindestens zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich gross. $\mathbf{u = 2(a + c)}$ $\mathbf{A = \frac{e \cdot f}{2}}$

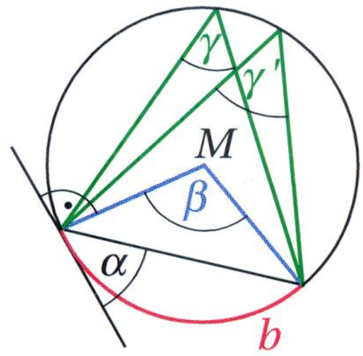
Begriff	Veranschaulichung	Zusammenhänge	
Sehnenviereck		Alle Eckpunkte liegen auf einem Kreis. Die Summe gegenüberliegender Winkel ist 180°. $\boldsymbol{\alpha+\gamma=\beta+\delta}$ $\boldsymbol{=180°}$ $\boldsymbol{a\cdot c+b\cdot d=e\cdot f}$ **(Satz des Ptolemäus)**	$\boldsymbol{u=a+b+c+d}$ $\boldsymbol{A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$ **(mit s = u/2)**

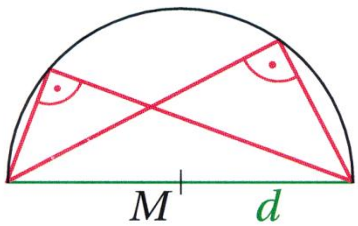
1.4. Kreis

1.4.1. Geraden am Kreis

Sehnen, Sekanten und Tangenten		
Geht eine Verbindungsstrecke zweier Punkte der Kreislinie nicht durch den Mittelpunkt, so ist sie eine **Sehne**. Eine Gerade, die einen Kreis schneidet, ist eine **Sekante**. Eine Gerade, die einen Kreis in genau einem Punkt berührt, heisst **Tangente**. Tangente und Berührungsradius sind zueinander senkrecht.	**p** **Passante** **t** **Tangente** **g** **Sekante** **r** **Radius** **d** **Durchmesser** **s** **Sehne**	

1.4.2. Winkel im Kreis

Sehnen, Sekanten und Tangenten		
Zwei Radien eines Kreises bilden zwei Winkel mit dem Mittelpunkt des Kreises als gemeinsamen Scheitel. Sie heissen **Mittelpunktswinkel** oder **Zentriwinkel**. Zwei Sehnen, die einen Punkt der Kreislinie (Peripherie) gemeinsam haben, bilden einen **Peripheriewinkel**.	**b** **Kreisbogen** **α** **Sehnen-tangentenwinkel** **β** **Zentriwinkel** **γ, γ‘** **Peripheriewinkel** $\boldsymbol{\beta = 2 \cdot \gamma}$ $\boldsymbol{\beta = 2 \cdot \alpha}$ $\boldsymbol{\alpha = \gamma}$	

Satz des Thales		
Ist C ein Punkt des Halbkreises über dem Durchmesser d, so ist der Winkel ∡ACB ein rechter Winkel.	**d** **Durchmesser**	

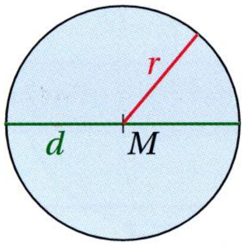
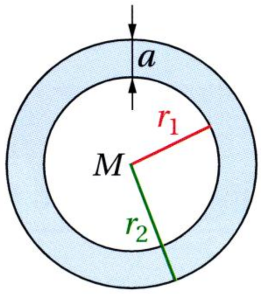
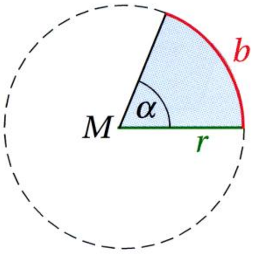
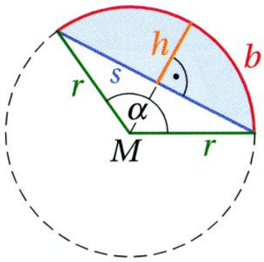
Der **Zentriwinkel** ist **doppelt so gross** wie der **Peripheriewinkel** über dem gleichen Bogen.

Alle **Peripheriewinkel** über dem **gleichen Bogen** sind **gleich gross**.

Zusammen ergeben ein Peripheriewinkel über dem Bogen b und über dem Ergänzungsbogen b‘ einen gestreckten Winkel (180°).

Peripheriewinkel über einem **Halbkreis** sind **rechte Winkel**.

1.4.3. Kreise im Überblick

Begriff	Veranschaulichung	Zusammenhänge / Formeln
Kreis		$\mathbf{d = 2 \cdot r}$ $\mathbf{u = 2 \cdot r \cdot \pi = d \cdot \pi}$ $\mathbf{A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4}}$
Kreisring		**a = Ringbreite** $\mathbf{a = r_2 - r_1}$ $\mathbf{u = 2 \cdot \pi \cdot (r_1 + r_2)}$ $\mathbf{A = \pi \cdot \left(r_2{}^2 - r_1{}^2\right)}$
Kreisausschnitt **Kreissektor**		**b = Kreisbogen** $\mathbf{b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}$ $\mathbf{b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot d}$ $\mathbf{A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2}$ $\mathbf{A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}}$ $\mathbf{A = \frac{b \cdot r}{2}}$
Kreisabschnitt **Kreissegment**		$\mathbf{h = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2}$ $\mathbf{s = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ $\mathbf{u = b + s}$ $\mathbf{A = \frac{\alpha \cdot 2 \cdot r^2 \cdot \pi}{360^\circ} - \frac{s(r-h)}{2}}$ $\mathbf{A = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} - \sin\alpha\right)}$

2. Stereometrie

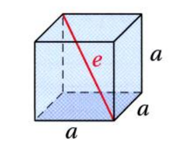
A_M	Mantelfläche	A_G	Grundfläche
A_O	Oberfläche	A_D	Deckfläche
V	Volumen	h_s	Höhe der Seitenfläche

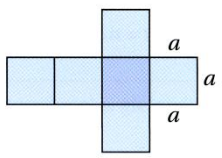
2.1. Körper mit ebenen Begrenzungsflächen

2.1.1. Prismen (Würfel, Quader, drei- & sechsseitiges Prisma)

Allgemein gilt: $\mathbf{V = A_G \cdot h}$ $\quad \mathbf{A_O = 2 \cdot A_G + A_M}$ $\quad \mathbf{A_G = A_D}$

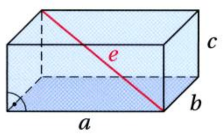
Würfel

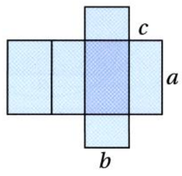




$$\mathbf{A_G = a^2}$$
$$\mathbf{A_M = 4 \cdot a^2}$$
$$\mathbf{A_O = 6 \cdot a^2}$$
$$\mathbf{e = a \cdot \sqrt{3}}$$
$$\mathbf{V = a^3}$$

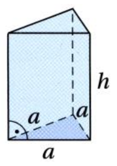
Quader

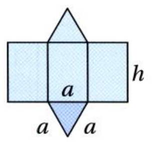




$$\mathbf{A_G = a \cdot b}$$
$$\mathbf{A_M = 2(a \cdot c + b \cdot c)}$$
$$\mathbf{A_O = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)}$$
$$\mathbf{e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$\mathbf{V = a \cdot b \cdot c}$$

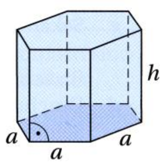
regelmässiges dreiseitiges Prisma

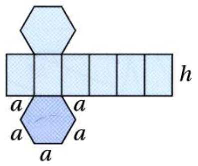




$$\mathbf{A_G = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}}$$
$$\mathbf{A_M = 3 \cdot a \cdot h}$$
$$\mathbf{A_O = \frac{a}{2}\left(a \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot h\right)}$$
$$\mathbf{V = \frac{a^2}{4} \cdot h \cdot \sqrt{3}}$$

regelmässiges sechsseitiges Prisma



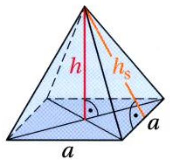


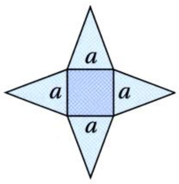
$$\mathbf{A_G = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2}$$
$$\mathbf{A_M = 6 \cdot a \cdot h}$$
$$\mathbf{A_O = 3 \cdot a(a \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot h)}$$
$$\mathbf{V = \frac{3a^2}{2} \cdot h \cdot \sqrt{3}}$$

2.1.2. Pyramiden (quadratische Pyramide, Tetraeder)

Allgemein gilt: $\mathbf{V = \frac{1}{3} A_G \cdot h}$ $\quad \mathbf{A_O = A_G + A_M}$

quadratische Pyramide





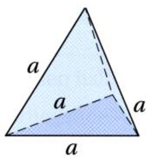
$$\mathbf{A_G = a^2}$$

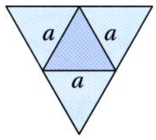
$$\mathbf{A_M = 2 \cdot a \cdot h_s}$$

$$\mathbf{A_O = a(a + 2 \cdot h_s)}$$

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h}$$

Tetraeder





$$\mathbf{A_G = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}}$$

$$\mathbf{A_M = \frac{3 \cdot a^2}{4} \cdot \sqrt{3}}$$

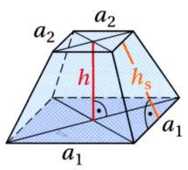
$$\mathbf{A_O = a^2 \cdot \sqrt{3}}$$

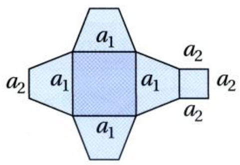
$$\mathbf{V = \frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{2}}$$

2.1.3. Pyramidenstümpfe (quadratischer- & dreiseitiger Pyramidenstumpf)

Allgemein gilt: $\mathbf{V = \frac{h}{3}\left(A_G + \sqrt{A_G \cdot A_D} + A_D\right)}$ $\quad \mathbf{A_O = A_G + A_D + A_M}$

quadratischer Pyramidenstumpf





$$\mathbf{A_G = {a_1}^2}$$

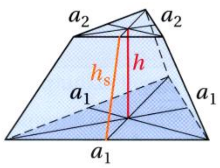
$$\mathbf{A_M = 2(a_1 + a_2)h_s}$$

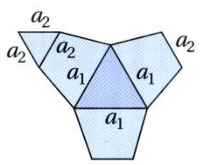
$$\mathbf{A_D = {a_2}^2}$$

$$\mathbf{A_O = {a_1}^2 + 2(a_1 + a_2)h_s + {a_2}^2}$$

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left({a_1}^2 + a_1 a_2 + {a_2}^2\right)}$$

regelmässiger dreiseitiger Pyramidenstumpf





$$\mathbf{A_G = \frac{{a_1}^2}{4}\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{A_M = \frac{3}{2}(a_1 + a_2)h_s}$$

$$\mathbf{A_D = \frac{{a_2}^2}{4}\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{A_O = \frac{\sqrt{3}}{4}\left({a_1}^2 + {a_2}^2\right) + \frac{3}{2}(a_1 + a_2)h_s}$$

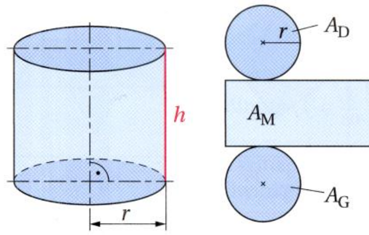
$$\mathbf{V = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot h \cdot \left({a_1}^2 + a_1 a_2 + {a_2}^2\right)}$$

2.2. Körper mit gekrümmten Begrenzungsflächen

2.2.1. Zylinder

Allgemein gilt: $\mathbf{V = A_G \cdot \mathit{h}}$ $\quad \mathbf{A_O = 2A_G + \mathit{A_M}}$ $\quad \mathbf{A_G = A_D}$

gerader Zylinder



$\mathbf{A_G = \pi \cdot r^2}$

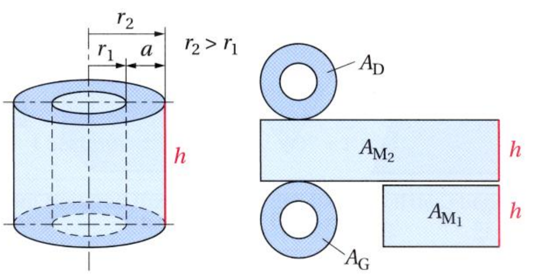
$\mathbf{A_M = 2\pi \cdot r \cdot h}$

$\mathbf{A_O = 2\pi \cdot r(r + h)}$

$\mathbf{V = \pi \cdot r^2 \cdot h}$

$\mathbf{V = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot h}$

gerader Hohlzylinder



$\mathbf{A_G = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}$

$\mathbf{A_{M1} = 2\pi \cdot r_1 \cdot h}$
$\mathbf{A_{M2} = 2\pi \cdot r_2 \cdot h}$

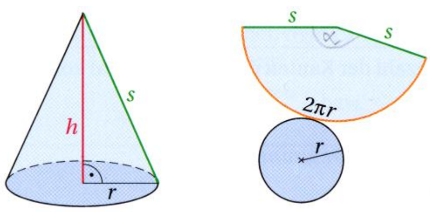
$\mathbf{A_O = 2\pi\left({r_2}^2 - {r_1}^2\right) + 2\pi \cdot h\,(r_1 + r_2)}$

(Wanddicke)
$\mathbf{a = r_2 - r_1}$

$\mathbf{V = \pi \cdot h\left({r_2}^2 - {r_1}^2\right)}$

2.2.2. Kegel

gerader Kegel



$\mathbf{A_G = \pi \cdot r^2}$

$\mathbf{A_M = \pi \cdot r \cdot s}$

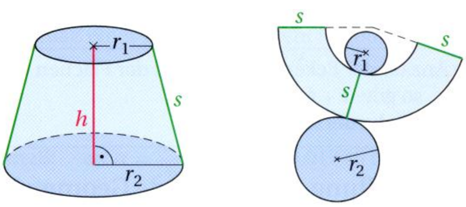
$\mathbf{A_O = \pi \cdot r(r + s)}$

$\mathbf{s = \sqrt{r^2 + h^2}}$

$\mathbf{\alpha = 360° \cdot \frac{r}{s} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\mathit{r}}{\mathit{s}}}$

$\mathbf{V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h}$

gerader Kegelstumpf



$\mathbf{A_G = \pi \cdot r_2^2}$

$\mathbf{A_M = \pi \cdot s(r_2 + r_1)}$

$\mathbf{A_D = \pi \cdot r_1^2}$

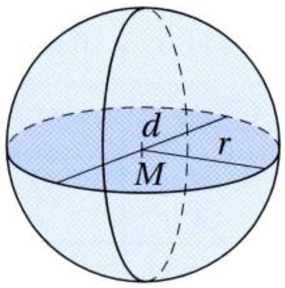
$\mathbf{A_O = A_G + A_D + A_M}$

$\mathbf{s = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + h^2}}$

$\mathbf{V = \frac{\pi}{3} \cdot h\left(r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2\right)}$

2.2.3. Kugel und Kugelteile

Kugel

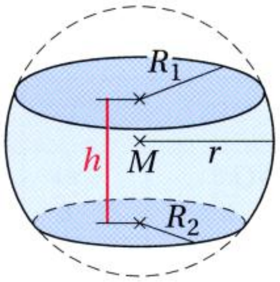


$$A_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \pi \cdot d^2$$

$$d = 2 \cdot r$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3$$

Kugelschicht (Kugelzone)

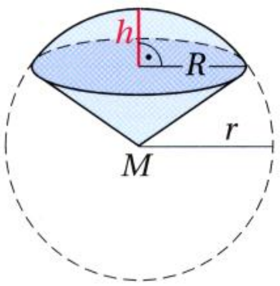


$$A_M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$A_O = \pi\left(R_1^2 + R_2^2 + 2rh\right)$$

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot h\left(3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2\right)$$

Kugelausschnitt (Kugelsektor)



$$A_M = \pi \cdot R \cdot r$$

(Kegelmantel)

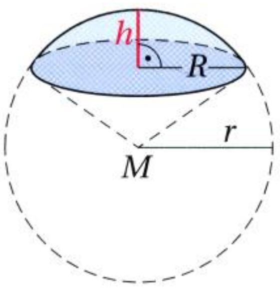
$$A_O = \pi \cdot r(2h + R)$$

$$A_O = \pi \cdot r\left(2h + \sqrt{h(2r - h)}\right)$$

$$R = \sqrt{h(2 \cdot r - h)}$$

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Kugelabschnitt (Kugelsegment)



$$A_M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$A_M = \pi\left(R^2 + h^2\right)$$

(Kugelkappe)

$$A_O = \pi \cdot R^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$A_O = \pi \cdot h(4 \cdot r - h)$$

$$A_O = \pi(2 \cdot R^2 + h^2)$$

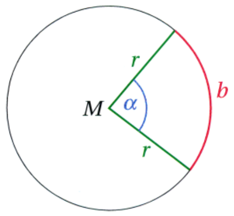
$$R = \sqrt{h(2 \cdot r - h)}$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h^2(3 \cdot r - h)$$

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot h\left(3 \cdot R^2 + h^2\right)$$

3. Trigonometrie

3.1. Gradmass, Bogenmass

Gradmass	Grösse des Winkels α (β, γ, δ, …) bezogen auf den Vollwinkel. Ein Winkel mit der Grösse von einem **Grad** ist der 360ste Teil des ebenen Vollwinkels (Schreibweise 1°). Ein Winkel dieser Grösse ergibt sich, indem ein Kreis durch Radien in 360 deckungsgleiche Teile zerlegt wird.
Bogenmass	Grösse des (Zentri-) Winkels α als Verhältnis von Bogenlänge b zu Radius r (bzw. als Masszahl der Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis): $\text{arc}\,\boldsymbol{\alpha} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{r}}$  Ein Winkel hat die Grösse von einem **Radiant** (Schreibweise: 1 rad), wenn b = r gilt (bzw. wenn die Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis den Wert 1 hat).
Umrechnung	Der Umfang eines Kreises mit Radius r = 1 beträgt 2π. Somit kann man den Bogen b = 2π den vollen Winkel 360° Grad zuordnen. $b : \alpha = 2\pi : 360$ **Umrechnung von Grad- in Bogenmass:** $b = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°}$ $1° \approx 0.01475$ rad **Umrechnung von Bogen- in Gradmass:** $\alpha = \frac{180° \cdot b}{\pi}$ 1 rad ≈ 57,296°

Bogenmass spezieller (im Gradmass gegebener) Winkel

Gradmass	30°	45°	60°	90°	180°	360°	57°17‘45“	57.29577°
Bogenmass	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	2π rad	1 rad	1 rad

<u>Test, ob beim Rechner das richtige Mass eingestellt ist:</u>

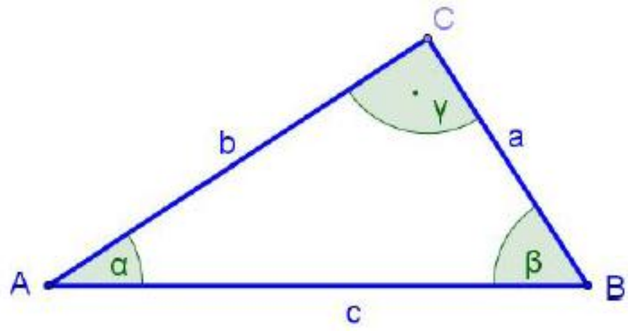
- sin(30°) = 0,5 → Gradmass ist eingestellt
- sin(30°) = -0,98803 → Gradmass ist nicht eingestellt
- sin(α) = 0 → Bogenmass ist eingestellt
- sin(α) = 0,054803 → Bogenmass ist nicht eingestellt

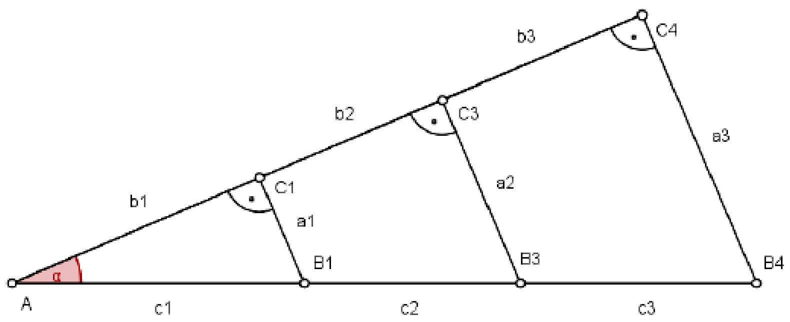
<u>Bemerkung:</u>

1) Die Angabe resp. Umrechnung in Minuten und Sekunden in der Regel nicht mehr nötig. Die Angabe im Bogenmass erfolgt – wenn möglich – als gekürzten Bruch von π, resp. als Dezimalzahl.
2) In der klassischen Geometrie arbeitet man mit dem Gradmass. In den Mathematikmoduln im Hochschulunterricht wird hauptsächlich im Bogenmass gearbeitet.
3) In der Trigonometrie sind beide Darstellungen in etwa gleich häufig. Es gilt daher in der Trigonometrie folgender Grundsatz: Die Lösung ist im selben Mass darzustellen, wie es in der Aufgabenstellung angegeben ist.

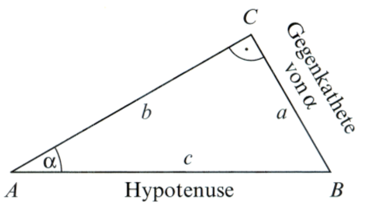
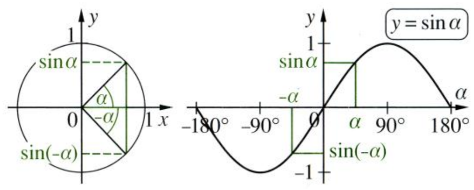
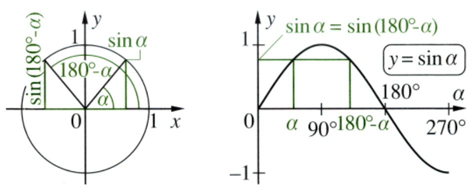
3.2. Trigonometrische Funktionen am rechtwinkligen Dreieck

3.2.1. Grundlagen zur Definition des Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck

Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck	
a ist die ***Gegenkathete*** (GK) zum Winkel α. b ist die ***Ankathete*** (AK) zum Winkel α.	

Ähnlichkeiten im rechtwinkligen Dreieck	
In **allen Dreiecken**, die im **rechten Winkel** und in dem **spitzen Winkel** α **übereinstimmen**, ist das **Verhältnis** der **Gegenkathete** von α zur **Länge** der **Hypotenuse** gleich. Es ändert sich nicht, wenn sich die Längen der Gegenkatheten und Hypotenuse ändern, sondern nur, wenn sich die **Grösse** des **Winkels** ändert. $\frac{\mathbf{a_1}}{\mathbf{c_1}} = \frac{\mathbf{a_2}}{\mathbf{c_2}} = \frac{\mathbf{a_3}}{\mathbf{c_3}}$	

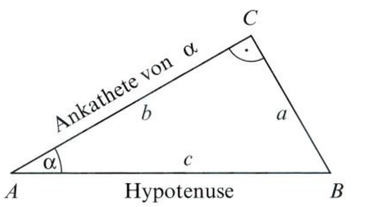
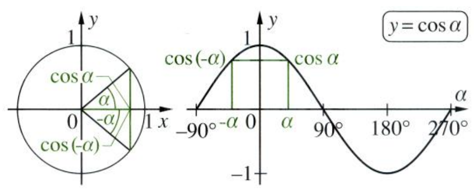
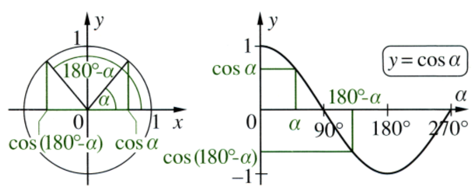
3.2.2. Sinus, Kosekans

Definition des Sinus, Kosekans von α		
In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man das Längenverhältnis der **Gegenkathete** von α zur **Hypotenuse** den **Sinus** (sin) von α	$\sin(\alpha) = \frac{\textbf{Gegenkathete von } \alpha}{\textbf{Hypotenuse}}$ $\sin(\alpha) = \frac{GK}{H} = \frac{a}{c}$	
Die **Arkusfunktion Sinus** (arc sin / inv sin) ist die **Umkehrfunktion** von Sinus.	$\alpha = \arcsin\left(\frac{\textbf{Gegenkathete von } \alpha}{\textbf{Hypotenuse}}\right)$ $\alpha = \arcsin\left(\frac{GK}{H}\right) = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$	
Der **Kehrwert** von **Sinus** wird als **Kosekans** (csc) bezeichnet.	$\csc(\alpha) = \frac{\textbf{Hypotenuse}}{\textbf{Gegenkathete von } \alpha}$ $\csc(\alpha) = \frac{H}{GK} = \frac{c}{a}$	

Wichtige Sinuswerte

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°
Sinuswert	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

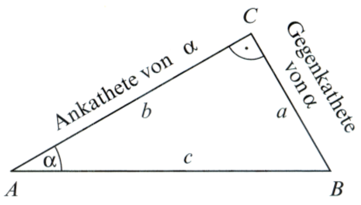
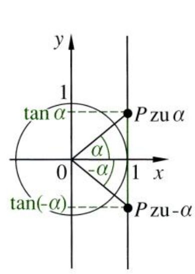
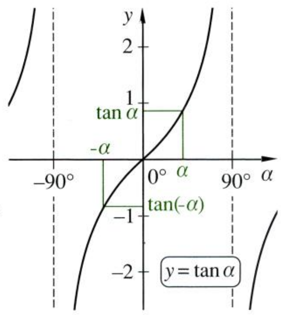
3.2.3. Kosinus, Sekans

Definition des Kosinus von α		
In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man das Längenverhältnis der **Ankathete** von α zur **Hypotenuse** den **Kosinus** (cos) von α	$\cos(\alpha) = \frac{\textbf{Ankathete von } \alpha}{\textbf{Hypotenuse}}$ $\cos(\alpha) = \frac{AK}{H} = \frac{b}{c}$	
Die **Arkusfunktion Kosinus** (arc cos / inv cos) ist die **Umkehrfunktion** von Kosinus.	$\alpha = \arccos\left(\frac{\textbf{Ankathete von } \alpha}{\textbf{Hypotenuse}}\right)$ $\alpha = \arccos\left(\frac{AK}{H}\right) = \arccos\left(\frac{b}{c}\right)$	
Der **Kehrwert** von **Kosinus** wird als **Sekans** (sec) bezeichnet.	$\sec(\alpha) = \frac{\textbf{Hypotenuse}}{\textbf{Ankathete von } \alpha}$ $\sec(\alpha) = \frac{H}{AK} = \frac{b}{c}$	

Wichtige Kosinuswerte

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°
Kosinuswert	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

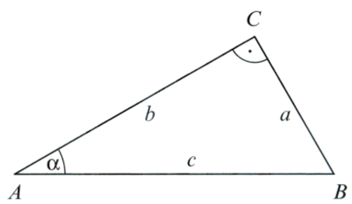
3.2.4. Tangens, Kotangens

Definition des Tangens von α		
In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man das Längenverhältnis der **Gegenkathete** von α zur **Ankathete** den **Tangens** (tan) von α	$\tan(\alpha) = \frac{\textbf{Gegenkathete von } \alpha}{\textbf{Ankathete von } \alpha}$ $\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK} = \frac{a}{b} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$	
Die **Arkusfunktion Tangens** (arc tan / inv tan) ist die **Umkehrfunktion** von Tangens.	$\alpha = \arctan\left(\frac{\textbf{Gegenkathete von } \alpha}{\textbf{Ankathete von } \alpha}\right)$ $\alpha = \arctan\left(\frac{GK}{AK}\right) = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$	 
Der **Kehrwert** von **Tangens** wird als **Kotangens** (cot) bezeichnet.	$\cot(\alpha) = \frac{\textbf{Ankathete von } \alpha}{\textbf{Gegenkathete von } \alpha}$ $\cot(\alpha) = \frac{AK}{GK} = \frac{b}{a} = \frac{\cos(a)}{\sin(a)}$	

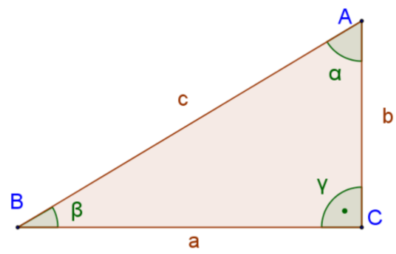
Wichtige Tangenswerte

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°
Tangenswert	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

3.2.5. Sinus- Kosinus- und Tangensfunktion am rechtwinkligen Dreieck

Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion	
Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel γ bei C gilt:	
$\textbf{Sinus eines Winkels} = \frac{\textbf{Gegenkathete des Winkels}}{\textbf{Hypotenuse}}$	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\sin\beta = \frac{b}{c}$
$\textbf{Kosinus eines Winkels} = \frac{\textbf{Ankathete des Winkels}}{\textbf{Hypotenuse}}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\cos\beta = \frac{a}{c}$
$\textbf{Tangens eines Winkels} = \frac{\textbf{Gegenkathete des Winkels}}{\textbf{Ankathete des Winkels}}$	$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\tan\beta = \frac{b}{a}$

3.2.6. Steigung, Steigungsdreieck, Steigungswinkel

Steigung, Steigungsdreieck, Steigungswinkel		
Im Steigungsdreieck entspricht die Ankathete der horizontalen Länge l und die Gegenkathete der Höhendifferenz h. Die **Steigung m** (β) ist der **Quotient** zwischen der **Höhendifferenz h** (b) und der **horizontale Länge l** (a).	$\mathbf{m} = \dfrac{\textbf{Hoehendifferenz}}{\textbf{horizontale Laenge}}$ $\mathbf{m} = \dfrac{\mathbf{h}}{\mathbf{l}}$ resp. $\mathbf{m} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ $\mathbf{m} = \tan(\boldsymbol{\beta})$ $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{arc\,tan}\left(\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right)$	

Der Quotient Höhendifferenz/horizontale Länge (b/a) entspricht der Definition des Tangens im rechtwinkligen Dreieck.

Bei einer Steigung von m = 1 oder p = 100% ist die horizontale Länge (a) gleich der Höhendifferenz (b). Das Steigungsdreieck ist in dem Fall also gleichschenklig-rechtwinklig und der Steigungswinkel beträgt α = 45°.

Steigung % in ° umrechnen:

x% ⇒ x° x° = arc tan(x% / 100)
x° ⇒ x% x% = tan(x°) · 100

Musterbeispiel:
Ein kleiner Traktor soll in einem Weinberg eingesetzt werden. Bei trockenem Boden darf die Steigung maximal 45% betragen.

a) Berechnen Sie den zugehörigen maximalen Steigungswinkel α.
b) Eine Reihe von Rebstöcken ist in Hangrichtung 38m lang. Der Traktor fährt bei einem Steigungswinkel von 20 Grad den Hang hinunter. Welchen Höhenunterschied überwindet er?
c) Welche Steigung (Angabe in Prozent) gehört zum Steigungswinkel 20 Grad?

<u>Lösung:</u>

a) tan(α) = 0,45 ⇒ α = arc tan(0,45) = 24.33 Grad.
b) sin(20) = b/38 ⇒ b = 38 · $\sin(20) = 12{,}996\text{m}$, also ca. 13m.
c) $\tan(20) \cdot 100 = 36.4\%$

3.2.7. Beziehungen unter den Winkelfunktionen

1. Die Seite a ist Gegenkathete von α. Von β aus gesehen ist sie jedoch die Ankathete.
2. Im rechtwinkligen Dreieck gilt: α + β = 90°. Daher können α und β auch als Differenz von 90° ausgedrückt werden. α = 90° - β resp. β = 90° - α.

GK(α) = AK(β)	**β = 90° - α**
$\sin(\alpha) = \dfrac{a}{c} = \cos(\beta)$	$\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$
$\cos(\alpha) = \dfrac{b}{c} = \sin(\beta)$	$\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$
$\tan(\alpha) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\cot(\alpha)} = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\tan(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(90° - \alpha)} = \cot(90° - \alpha)$

3.3. Trigonometrische Funktionen am schiefwinkligen Dreieck

3.3.1. Sinussatz

Wir teilen ein beliebiges Dreieck △ABC durch die Höhe h_c in zwei rechtwinklige Teildreiecke und suchen nach einer Beziehung zwischen den Seiten a und b sowie dem Winkel α und β.

Herleitung Sinussatz

Im **roten** Teildreieck gilt:

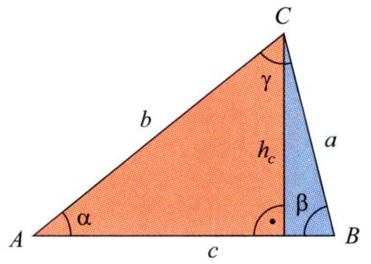
$$\sin(\alpha) = \frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{H}} = \frac{h_c}{b} \quad \Rightarrow \quad h_c = b \cdot \sin(\alpha)$$

Im **blauen** Teildreieck gilt:

$$\sin(\beta) = \frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{H}} = \frac{h_c}{a} \quad \Rightarrow \quad h_c = a \cdot \sin(\beta)$$

Durch Gleichsetzen folgt:

$$h_c = b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \mathrm{const.}$$

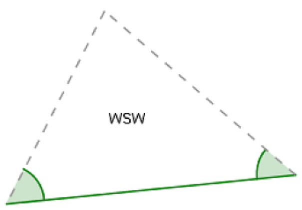


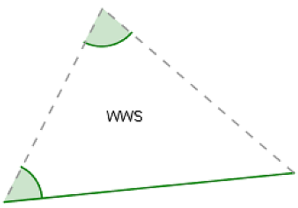
Analog kann man mit den beiden anderen Höhen des Dreiecks gleich verfahren.

In jedem beliebigen Dreieck △ABC ist das **Verhältnis** der **Länge einer Seite** zum **Sinus** des **gegenüberliegenden Winkels** gleich dem Durchmesser des Umkreises.

$$\frac{\mathbf{a}}{\sin(\boldsymbol{\alpha})} = \frac{\mathbf{b}}{\sin(\boldsymbol{\beta})} = \frac{\mathbf{c}}{\sin(\boldsymbol{\gamma})} = \mathbf{2r}$$

Der Sinussatz kann verwendet werden, wenn zwei Winkel und eine Seite (wsw und wws) gegeben sind. Zudem kann er auch angewandt werden, wenn zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind. (Das entspricht den Gegebenheiten der Kongruenzsätze WSW und SsW, vgl. 1.2.5.)



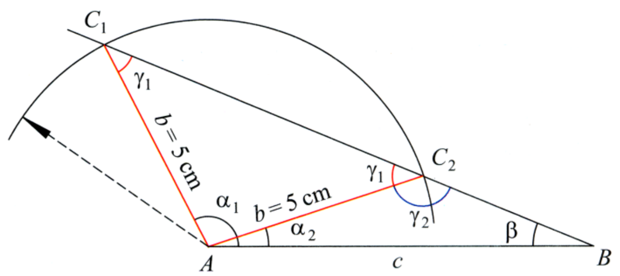


Liegt bei ssw der Winkel der grösseren Seite gegenüber (Ssw), dann gibt es ein mögliches Dreieck.

Liegt jedoch der Winkel der kleineren Seite gegenüber (sSw), dann gibt es wie beim Konstruieren erkennbar zwei Lösungen.

Der Rechner liefert nur die spitzwinklige ($\alpha < 90°$) Lösung α_1, die stumpfwinklige ($\alpha > 90°$) α_2 kann mit folgender Formel berechnet werden:
$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$.

Musterbeispiel:
Gegeben: Dreieck △ABC mit b = 5cm, c = 8cm und β = 20°
Gesucht: Winkel α und γ



$$\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{c \cdot \sin(\beta)}{b}\right) = \arcsin\left(\frac{8 \cdot \sin(20°)}{5}\right) = 33.2°$$

$$\gamma_2 = 180° - y_1 = 180° - 33.2° = 146.8°$$

3.3.2. Kosinussatz

Wir teilen ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ durch die Höhe h_c in zwei rechtwinklige Teildreiecke und suchen nach einer Beziehung zwischen den Seiten a, b und c sowie dem Winkel α.

Herleitung Kosinussatz

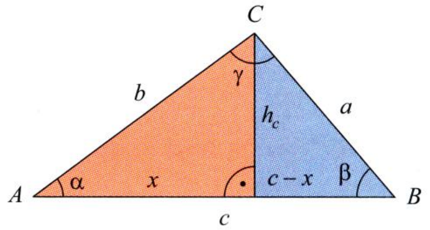
Im **roten** Teildreieck gilt nach Pythagoras:
$$b^2 = h_c^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad h_c^2 = b^2 - x^2$$

Im **blauen** Teildreieck gilt nach Pythagoras:
$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 \quad \Rightarrow \quad h_c^2 = a^2 - (c-x)^2$$

Gleichsetzen und nach a2 auflösen:
$$a^2 - (c-x)^2 = b^2 - x^2$$
$$a^2 - (c^2 - 2cx + x^2) = b^2 - x^2$$
$$a^2 - c^2 + 2cx - x^2 = b^2 - x^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

Im **roten** Teildreieck gilt weiter:
$$\cos(\alpha) = \frac{AK}{H} = \frac{x}{b} \quad \Rightarrow \quad x = b \cdot \cos(\alpha)$$

Durch einsetzten erhalten wir:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$



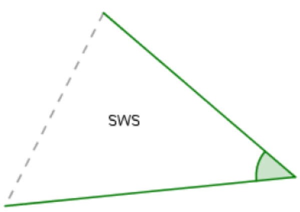
Analog kann man mit den beiden anderen Höhen des Dreiecks gleich verfahren.

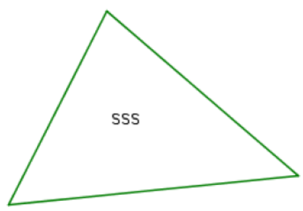
In jedem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$ ist das **Quadrat** der **Länge einer Seite** aus dem **gegenüberliegenden Winkel** und den **anliegenden Seiten** berechenbar.

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)}$$
$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)}$$
$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \qquad \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \qquad \gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Den Kosinussatz können wir verwenden, wenn zwei Seiten und der dazwischenliegende Winkel (sws) oder drei Seiten gegeben sind (sss).





Der Kosinussatz gilt auch dann, wenn der jeweilige Winkel grösser als 90°, also ein stumpfer Winkel ist.

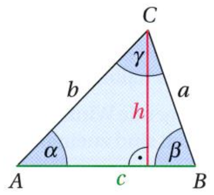
3.3.3. Flächensatz

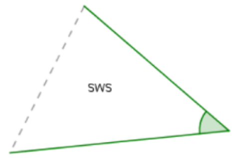
Flächensatz

Kennt man von einem Dreieck die beiden Seiten b und c sowie den dazwischen liegenden Winkel α, so ist der Flächeninhalt A der Dreiecksfläche gegeben durch:

$$\mathbf{A = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin(\alpha)}$$

Die Gleichung gilt auch für stumpfe Winkel $\alpha \in]90°; 180]$. $(90° < \alpha \leq 180°)$





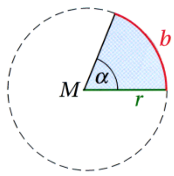
3.3.4. Berechnung am Kreissektor (auch Kreisausschnitt)

Berechnung am Kreissektor (auch Kreisausschnitt)

Zur Berechnung der Bogenlänge oder der Sektor-Fläche kann das Bogenmass verwendet werden. Wir bezeichnen den Winkel im Bogenmass mit $\widehat{\varphi}$.
Wir können nun die bekannten Formeln auch im Bogenmass angeben, wenn wir die Umrechnungsformel $\widehat{\varphi} = \frac{\pi \cdot \varphi}{180°}$ verwenden und einsetzen.

$$\mathbf{b = \frac{r \cdot \pi \cdot \varphi}{180°} = \widehat{\varphi} \cdot r}$$

$$\mathbf{A_{Sektor} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \varphi}{360°} = \frac{r^2 \cdot \widehat{\varphi}}{2} = \frac{b \cdot r}{2}}$$



3.3.5. Kreissegment (auch Kreisabschnitt)

Flächensatz

Durch den Flächensatz (vgl. 3.4.3) gilt:

$$A_{Dreieck} = \frac{r^2}{2} \cdot \sin(\varphi) = \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin(\varphi)$$

Berechnung des Kreissektors (vgl. 3.4.4):

$$A_{Sektor} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \varphi}{360°}$$

Kreissegment:

$$A_{Segment} = A_{Sektor} - A_{Dreieck}$$

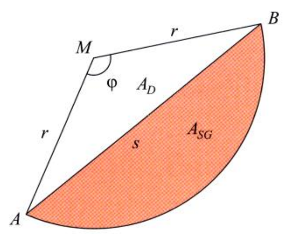
$$A_{SG} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \varphi}{360°} - \frac{r^2}{2} \cdot \sin(\varphi)$$

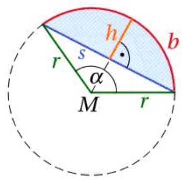
$$A_{SG} = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot \varphi}{180°} - \sin(\varphi)\right)$$

Der **Flächeninhalt** der **Segmentfläche A_{SG}** kann aus dem **Radius r** und dem **Zentriwinkel φ** berechnet werden:

$$\mathbf{A_{SG} = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot \varphi}{180°} - \sin(\varphi)\right)}$$

$$\mathbf{A_{SG} = \frac{r^2}{2} \cdot (\widehat{\varphi} - \sin(\widehat{\varphi}))}$$

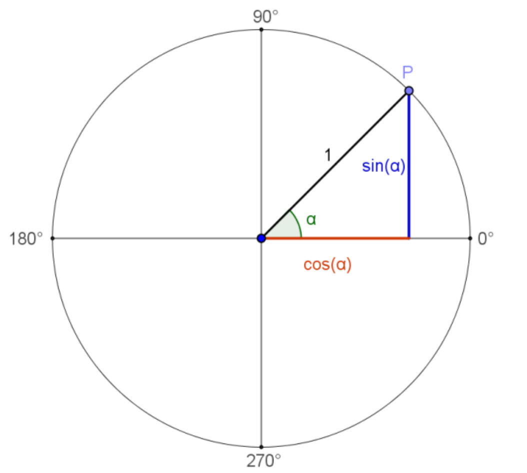




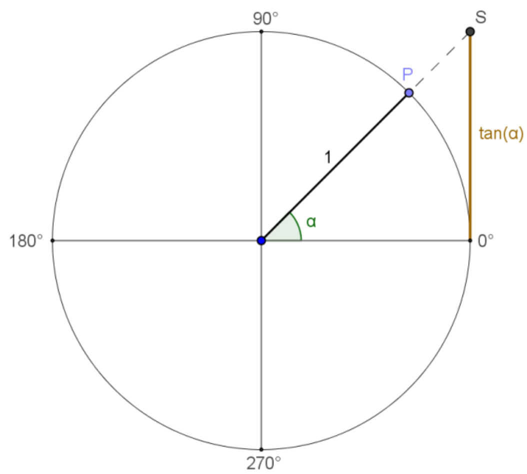
3.4. Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

Der Einheitskreis ist ein Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Radius r = 1 Längeneinheit.

3.4.1. Sinus- und Kosinusfunktion

Sinus- und Kosinusfunktion	
Am Einheitskreis gilt für einen beliebigen Punkt P (X_P; Y_P) auf der Kreislinie und den zugehörigen Zentriwinkel α: Die **y-Koordinate** des Punktes P ist der **Sinuswert** von α: $y_p = \sin(\alpha)$ Die **x-Koordinate** des Punktes P ist der **Kosinuswert** von α: $x_p = \cos(\alpha)$	

3.4.2. Tangensfunktion

Tangensfunktion	
Am Einheitskreis gilt für einen beliebigen Punkt P auf der Kreislinie und den zugehörigen Zentriwinkel α: Die **y-Koordinate** des **Punktes S** ist der **Tangens** von α: $y_s = \tan(\alpha)$ Dies entspricht der Länge des **Tangentenabschnitts** auf der rechten Tangente.	

3.4.3. Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen (Phytagoras am Einheitskreis)

Beziehungen zwischen Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion

Pythagoras am Einheitskreis:

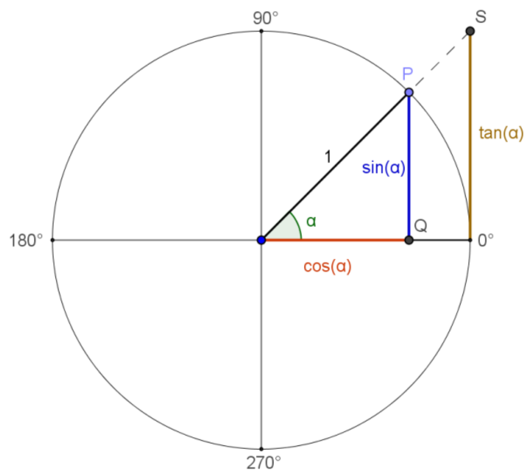
$$\mathbf{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

Ähnlichkeit am Einheitskreis:

$$\mathbf{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) = 1$$

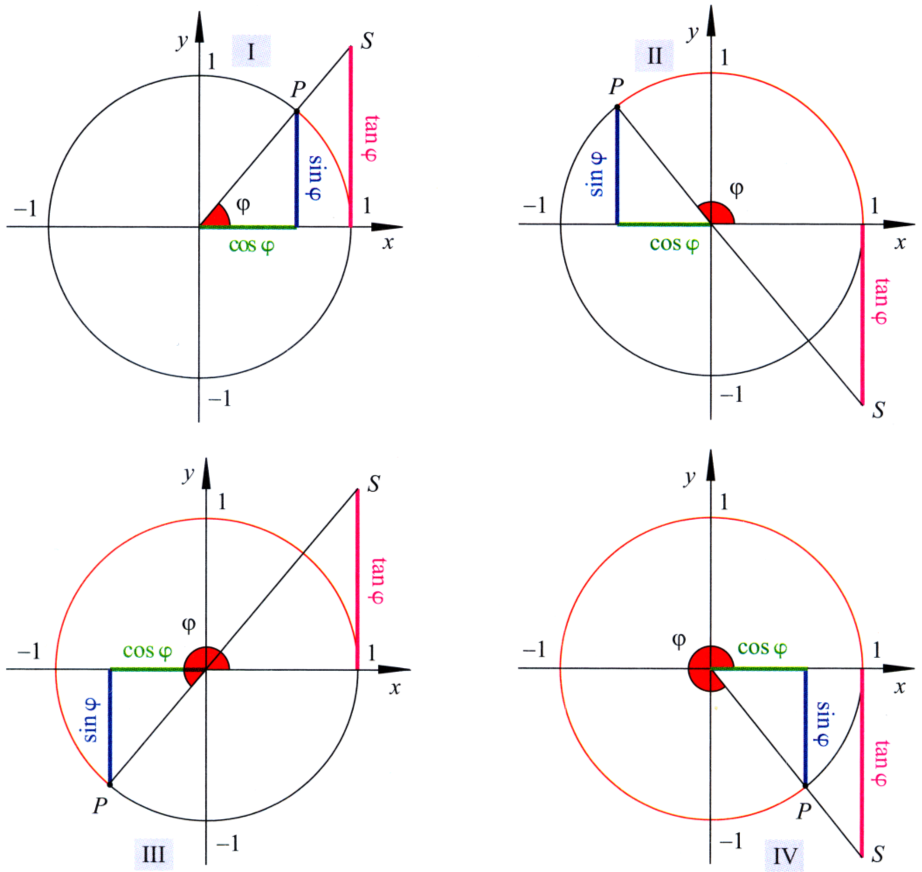


Mithilfe der Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen finden wir weitere Beziehungen, so dass sich jede der drei (resp. mit cot vier) Winkelfunktionen in die beiden (drei) anderen umrechnen lässt:

	sin (φ)	cos (φ)	tan (φ)	cot (φ)
sin (φ)	-	$\mathbf{\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}}$	$\mathbf{\frac{\tan(\varphi)}{\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}}}$	$\mathbf{\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2(\varphi)}}}$
cos (φ)	$\mathbf{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}}$	-	$\mathbf{\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}}}$	$\mathbf{\frac{\cot(\varphi)}{\sqrt{1+\cot^2(\varphi)}}}$
tan (φ)	$\mathbf{\frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}}}$	$\mathbf{\frac{\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}}{\cos(\varphi)}}$	-	$\mathbf{\frac{1}{\cot(\varphi)}}$
cot (φ)	$\mathbf{\frac{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}}{\sin(\varphi)}}$	$\mathbf{\frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}}}$	$\mathbf{\frac{1}{\tan(\varphi)}}$	-

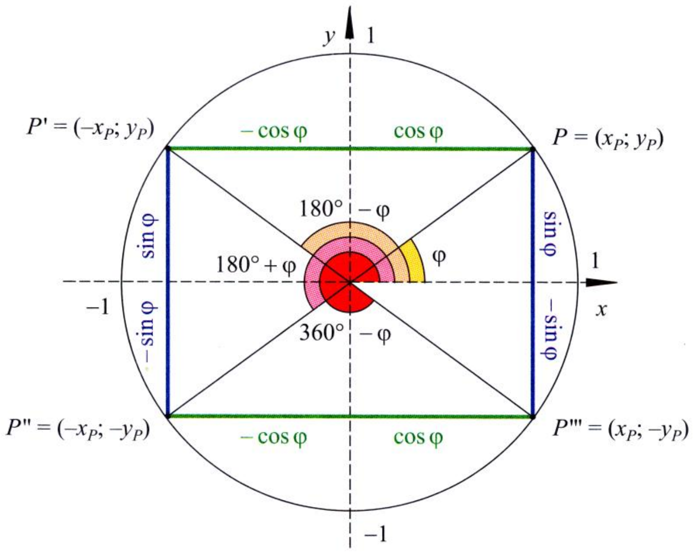
3.4.4. Vorzeichen der Trigonometrischen Funktionen

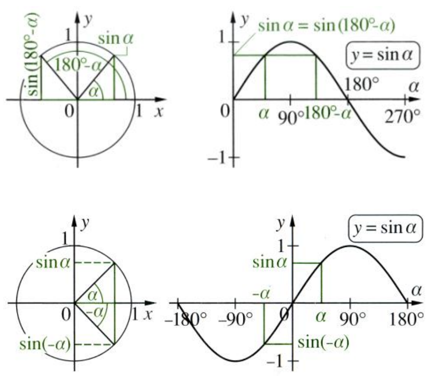
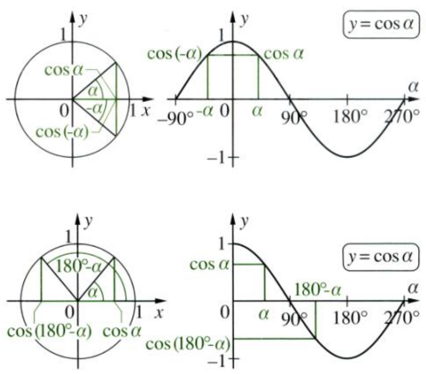
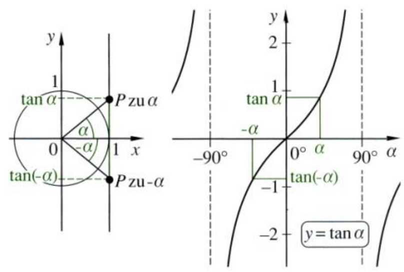
Wenn wir den Punkt P auf der Kreislinie rotieren lassen, können wir herausfinden, welche Vorzeichen die Funktionswerte in den Quadranten I bis IV, das heisst für Winkel zwischen 0° und 360°, haben.



Quadrant	Intervall	sin (φ)	cos (φ)	tan (φ)
I	0° < φ < 90°	+	+	+
II	90° < φ < 180°	+	−	−
III	180° < φ < 270°	−	−	+
IV	270° < φ < 360°	−	+	−

3.4.5. Symmetrieeigenschaften am Einheitskreis



Sinus	Kosinus	Tangens
sin(180° - α) = sin (α)	cos(180° - α) = - cos (α)	tan(180° - α) = - tan (α)
sin(180° + α) = - sin (α)	cos(180° + α) = - cos (α)	**tan(180° + α) = tan (α)**
sin(360° - α) = - sin (α)	**cos(360° - α) = cos (α)**	tan(360° - α) = - tan (α)
		
Die **Sinusfunktion** ist eine periodische, **ungerade Funktion:** sin(-α) = - sin(α). Sie kann Werte von -1 bis +1 annehmen.	Die **Kosinusfunktion** ist eine periodische, **gerade Funktion:** cos(-α) = cos (α). Sie kann Werte von -1 bis +1 annehmen.	Die **Tangensfunktion** ist eine periodische, **ungerade Funktion:** tan(-α) = - tan(α). Sie kann Werte von -∞ bis +∞ annehmen.

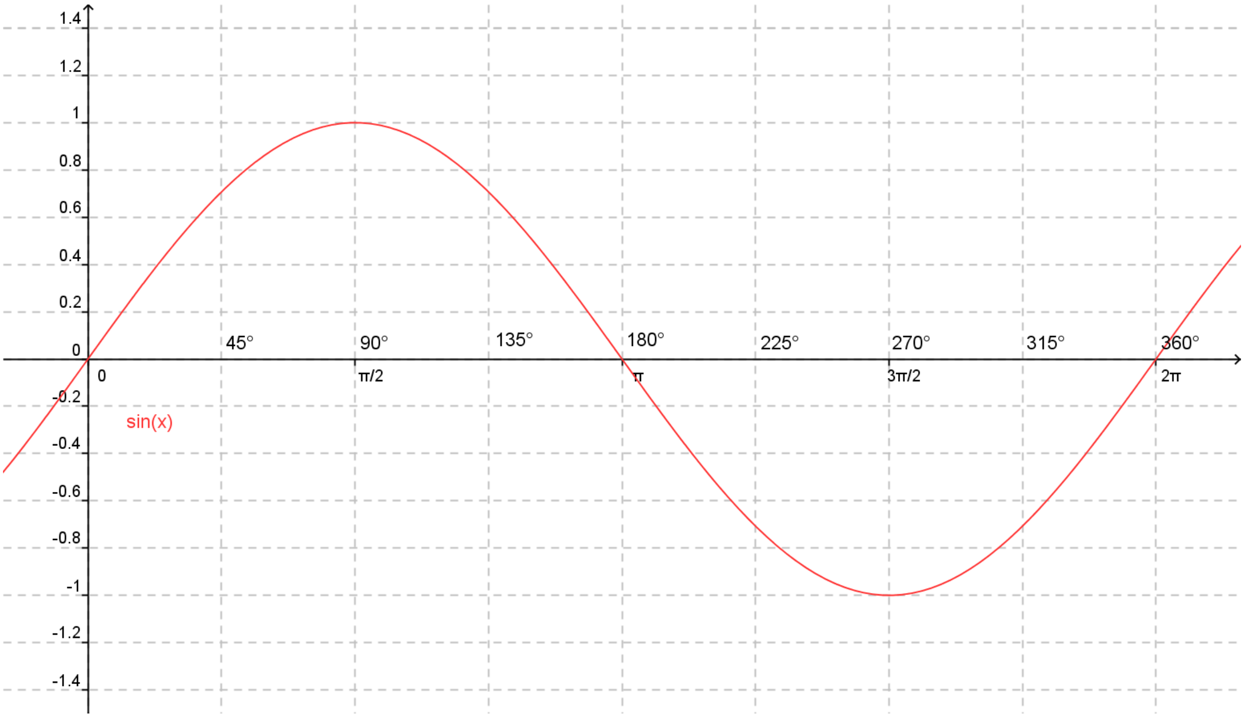
3.4.6. Reduktionsformeln

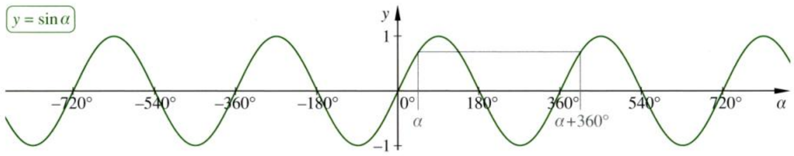
Die Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte für Winkelgrössen zwischen 90° und 360° können auf einen Wert für eine Winkelgrösse zwischen 0° und 90° zurückgeführt (reduziert) werden.

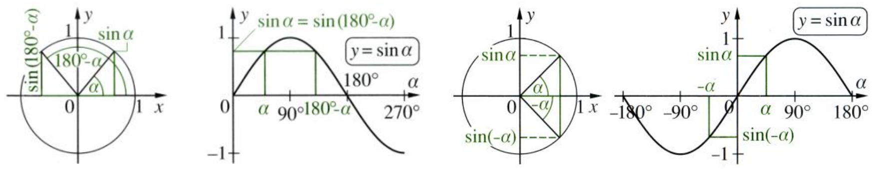
Sinus	Kosinus	Tangens
sin(180° - α) = sin (α)	cos(360° - α) = cos (α)	tan(180° + α) = tan (α)
sin(π - α) = sin (α)	cos(2π - α) = cos (α)	tan(π + α) = tan (α)

3.4.7. Grafische Darstellung der Winkelfunktionen

Grafische Darstellung der Sinusfunktion

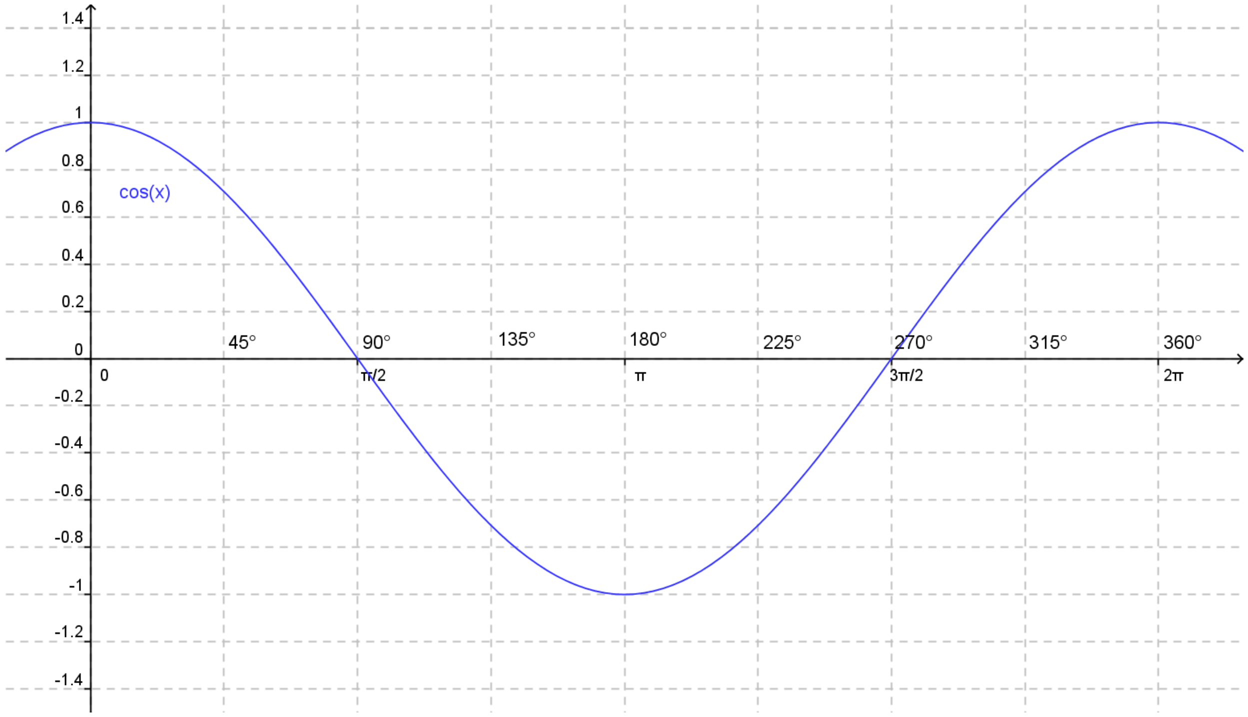


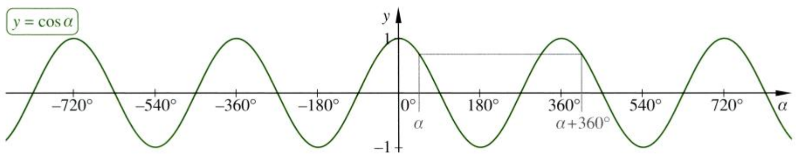


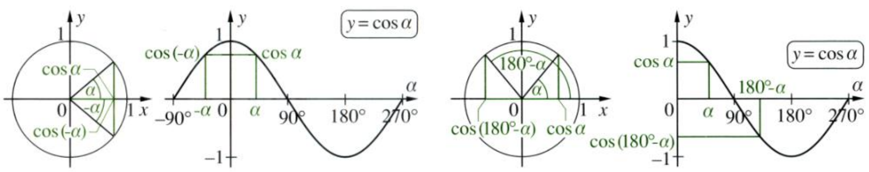


Die **Sinusfunktion** ist eine periodische, **ungerade Funktion:** sin(-α) = - sin(α).
Sie kann Werte von -1 bis +1 annehmen.

Grafische Darstellung der Kosinusfunktion

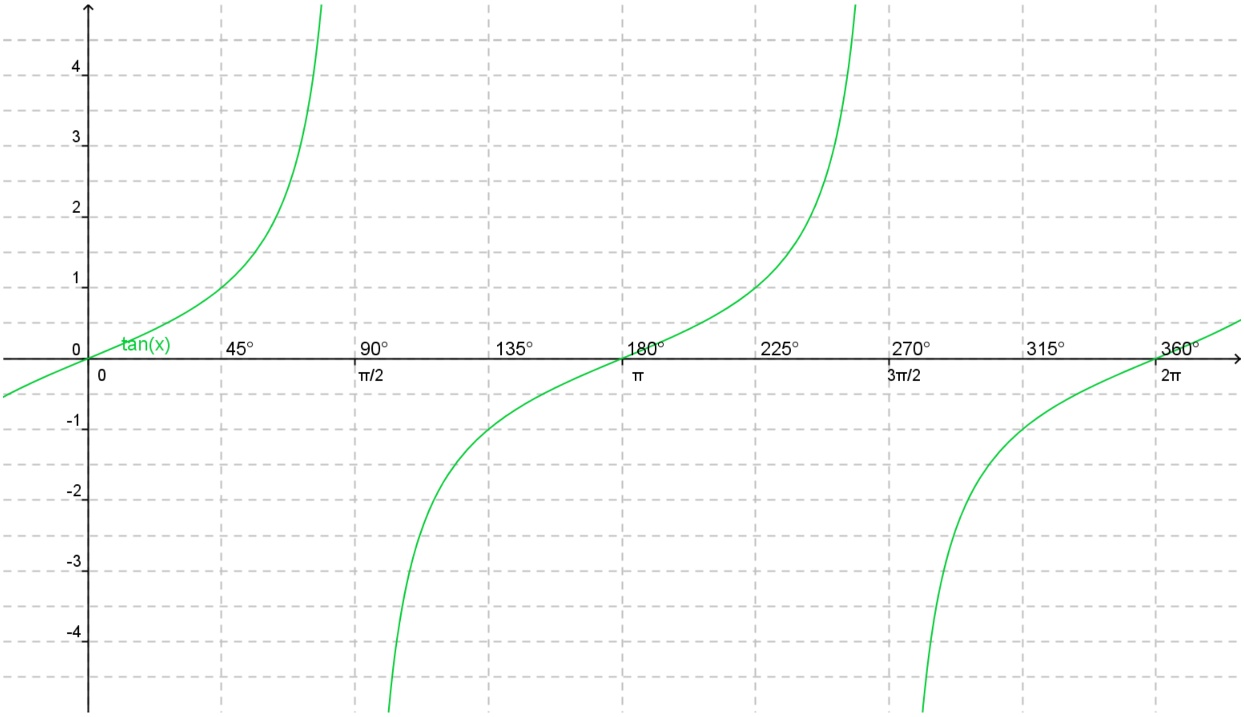


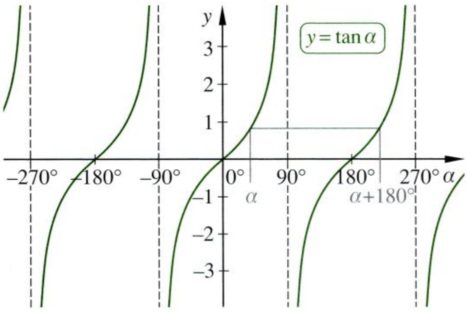


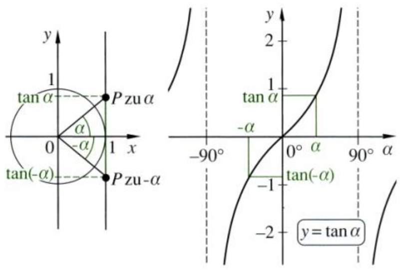


Die **Kosinusfunktion** ist eine periodische, **gerade Funktion:** cos(-α) = cos (α).
Sie kann Werte von -1 bis +1 annehmen.

Grafische Darstellung der Tangensfunktion

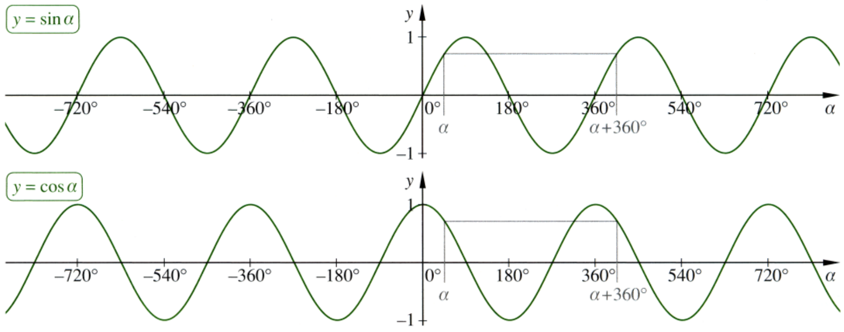


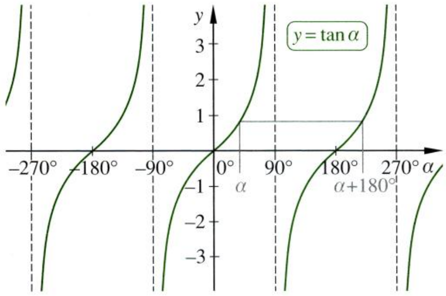




Die **Tangensfunktion** ist eine periodische, **ungerade Funktion:** tan(-α) = - tan(α).
Sie kann Werte von -∞ bis +∞ annehmen.

3.4.8. Zusammenfassung der Eigenschaften der Graphen





	Sinus	Kosinus	Tangens
	y = f(x) = sin (x)	**y = f(x) = cos (x)**	**y = f(x) = tan (x)**
Definitionsbereich:	]-∞; ∞[resp. DB = $\mathbb{R}$	]-∞; ∞[resp. DB = $\mathbb{R}$	DB = $\mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right)$
Wertebereich:	[-1; 1]	[-1; 1]	]-∞; ∞[resp. WB = $\mathbb{R}$
Periodizität:	Periodenlänge: 2π: sin(x + 2k · π) = sin(x), $k \in \mathbb{Z}$	Periodenlänge: 2π: cos(x + 2k · π) = cos(x), $k \in \mathbb{Z}$	Periodenlänge: π: tan(x + k · π) = tan(x), $k \in \mathbb{Z}$
Symmetrie:	Punktsymmetrisch zum Ursprung: ungerade Funktion sin(-x) = -sin(x)	symmetrisch zur y-Achse: gerade Funktion cos(x) = cos(-x)	Punktsymmetrisch zum Ursprung: ungerade Funktion tan(-x) = -tan(x)
Symmetrieachsen:	$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$	-
Nullstellen:	$\{x \mid x = k \cdot \pi\}, k \in \mathbb{Z}$	$\left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$	$\{x \mid x = k \cdot \pi\}, k \in \mathbb{Z}$
Maximal Punkte:	$P_{Max}(x; 1)$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$	$P_{Max}(x; 1)$ $x = 2k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$	-
Minimal Punkte:	$P_{Min}(x; -1)$ $x = \frac{3\pi}{2} + 2k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$	$P_{Max}(x; -1)$ $x = \pi + 2k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$	-
Es gilt:	Den Graphen der Kosinusfunktion erhält man, indem man den Graphen der Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschiebt: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$		$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

3.5. Übersicht Trigo rechtwinklige/allg. Dreieck, Sinussatz, Kosinussatz

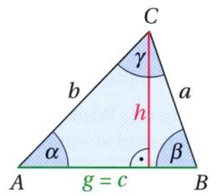
3.5.1. Rechtwinkliges Dreieck

Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion		
$\sin(\alpha) = \frac{GK}{H} = \cos(\beta)$	$\cos(\alpha) = \frac{AK}{H} = \sin(\beta)$	$\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK} = \frac{1}{\cot(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

3.5.2. Allgemeines Dreieck

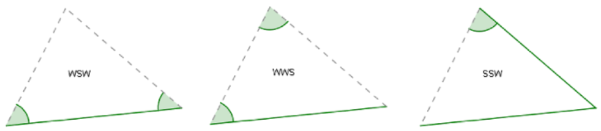
Wichtige trigonometrische Werte

	0°	30°	45°	60°	90°
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos(α)	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan(α)	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n. def.



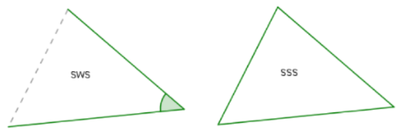
Sinussatz

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$$



Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$



Beziehungen zwischen Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion

Pythagoras am Einheitskreis:	Ähnlichkeit am Einheitskreis:
$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$	$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

	sin (φ)	cos (φ)	tan (φ)	cot (φ)
sin (φ)	-	$\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}$	$\frac{\tan(\varphi)}{\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2(\varphi)}}$
cos (φ)	$\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}$	-	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}}$	$\frac{\cot(\varphi)}{\sqrt{1+\cot^2(\varphi)}}$
tan (φ)	$\frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}}{\cos(\varphi)}$	-	$\frac{1}{\cot(\varphi)}$
cot (φ)	$\frac{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}}{\sin(\varphi)}$	$\frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}}$	$\frac{1}{\tan(\varphi)}$	-

Reduktionsformeln

Sinus	Kosinus	Tangens
sin(180° - α) = sin (α)	cos(360° - α) = cos (α)	tan(180° + α) = tan (α)
sin(π - α) = sin (α)	cos(2π - α) = cos (α)	tan(π + α) = tan (α)

3.6. Transformation der Sinusfunktion, die allgemeine Sinusfunktion

3.6.1. Die allgemeine Sinusfunktion

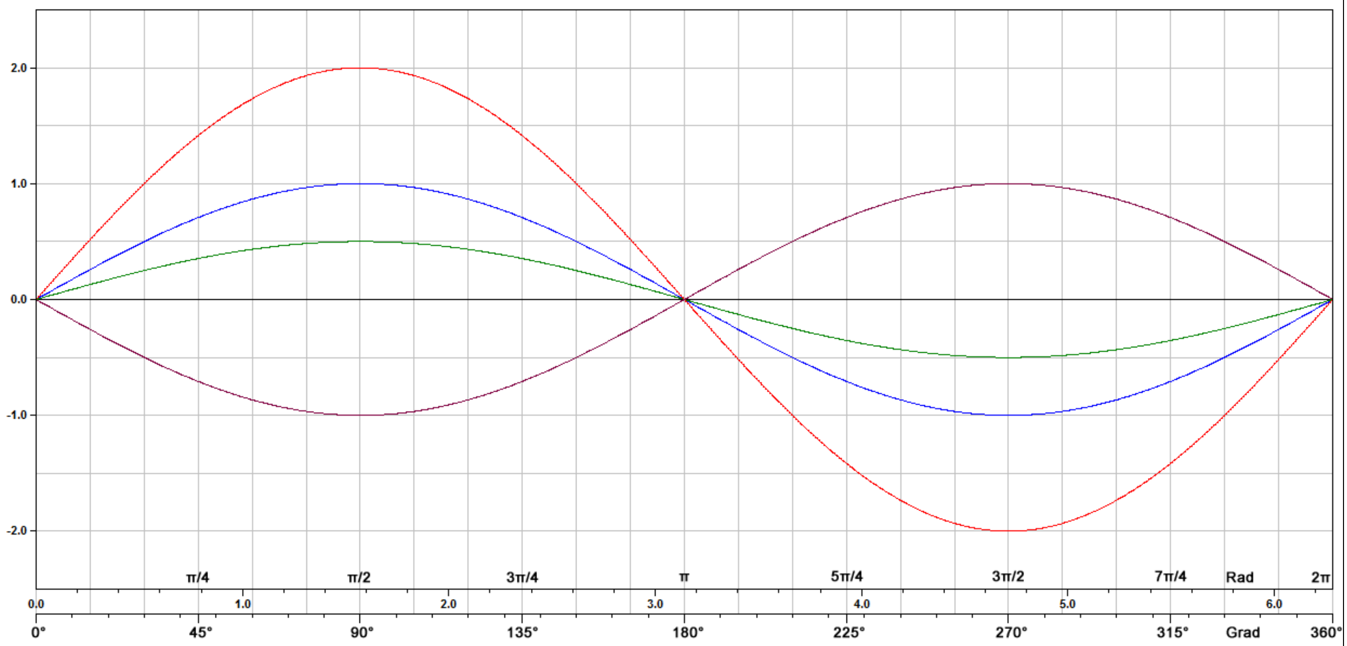
Die allgemeine Sinusfunktion ist folgendermassen definiert:

$$\mathbf{y = a \cdot \sin(b \cdot (x + u)) + v}$$

dabei gilt: $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $b \in \mathbb{R}^{+}$ und $u, v \in \mathbb{R}$

3.6.2. Parameter a: Strecken / Stauchen auf y-Achse (Amplitude): y = a · sin(x); a ∈ ℝ\{0}

Parameter a: Amplitude



Blau:	**Rot:**	**Grün:**	**Violett:**
$y = \sin(x)$	$y = 2 \cdot \sin(x)$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin(x)$	$y = (-1) \cdot \sin(x)$

|a| > 1	**0 < |a| < 1**	**a < 0**
Streckung in y-Richtung	Stauchung in y-Richtung	Zusätzliche Spiegelung an der x-Achse

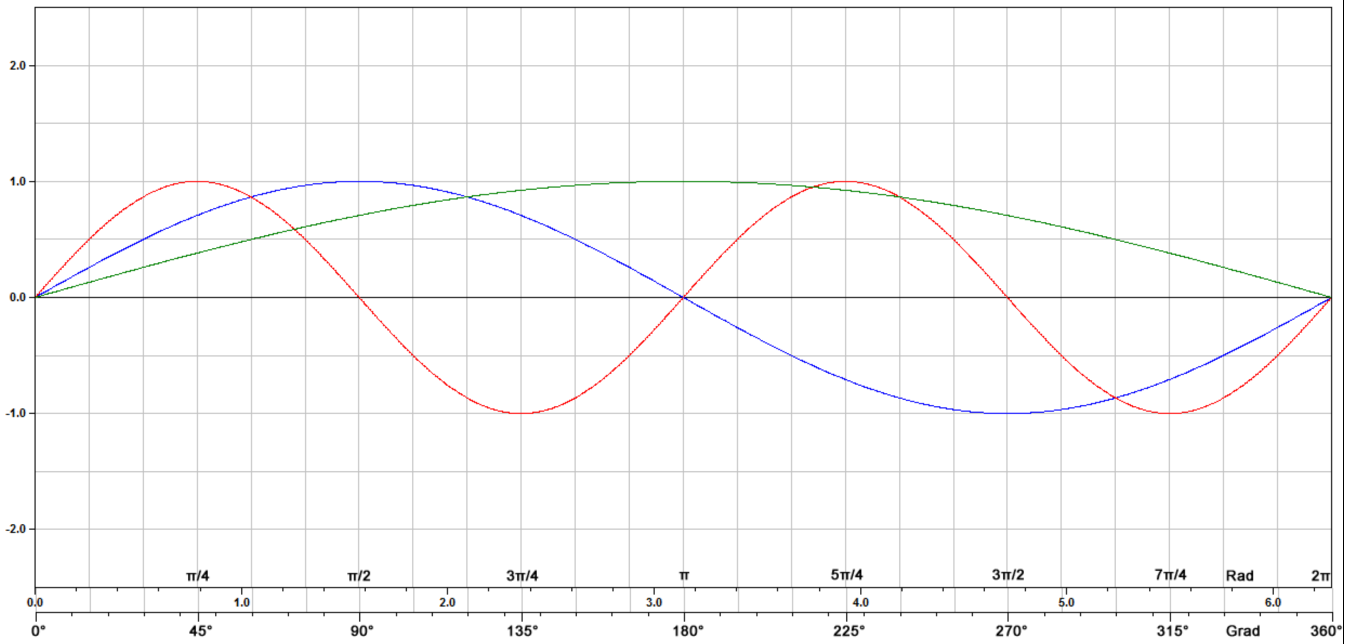
Eigenschaften von f(x) = a · sin(x)

	y = f(x) = sin(x)	**y = f(x) = a · sin(x)**
Definitionsbereich:	]-∞; ∞[	]-∞; ∞[
Wertebereich:	[-1; 1]	**[-a; a]**
Periodizität:	Periodenlänge: 2π	Periodenlänge: 2π
Nullstellen:	$x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$
Maximal Punkte:	$P_{Max}(x; 1)$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$P_{Max}(x; \mathbf{a})$ (*) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Minimal Punkte:	$P_{Min}(x; -1)$ $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$P_{Min}(x; \mathbf{-a})$ (*) $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(*) für a < 0 umgekehrt

3.6.3. Parameter b: Strecken / Stauchen auf x-Achse: $y = \sin(b \cdot x)$; $b \in \mathbb{R}^+$

Parameter b



Blau:	**Rot:**	**Grün:**
$y = \sin(x)$	$y = \sin(2 \cdot x)$	$y = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$

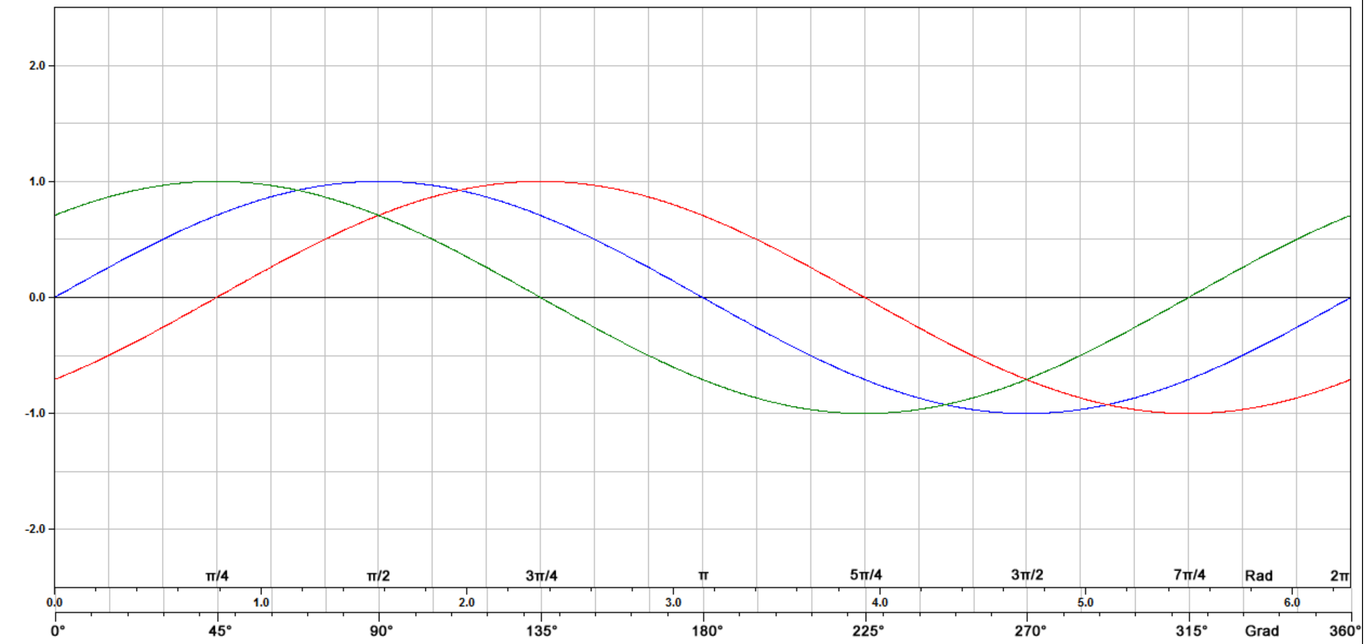
b > 1	**0 < b < 1**
Stauchung in x-Richtung um den Faktor b. (kleinere Periode, höhere Frequenz)	Streckung in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{b}$. (grössere Periode, kleinere Frequenz)

Eigenschaften von f(x) = sin(b · x)

	y = f(x) = sin(x)	**y = f(x) = sin(b · x)**
Definitionsbereich:	]-∞; ∞[	]-∞; ∞[
Wertebereich:	[-1; 1]	[-1; 1]
Periodizität:	Periodenlänge: 2π	**Periodenlänge:** $\mathbf{\frac{2\pi}{b}}$
Nullstellen:	$x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$	$\mathbf{x = \frac{k \cdot \pi}{b}, k \in \mathbb{Z}}$
Maximal Punkte:	$P_{Max}(x; 1)$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$P_{Max}(x; 1)$ $\mathbf{x = \frac{\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}}$
Minimal Punkte:	$P_{Min}(x; -1)$ $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$P_{Min}(x; -1)$ $\mathbf{x = \frac{3\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}}$

3.6.4. Parameter u: Schieben in x-Richtung: y = sin(x + u); u ∈ ℝ

Parameter u



Blau:

$$y = \sin(x)$$

Rot:

$$y = \sin\left(x + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Grün:

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

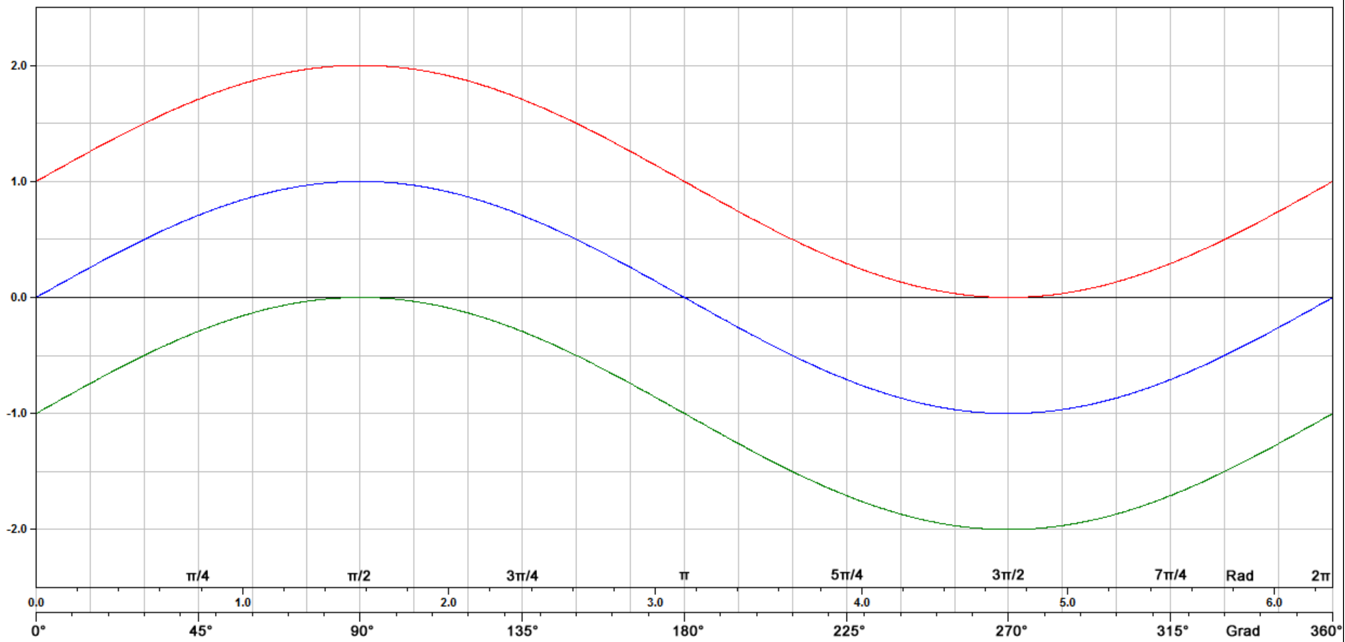
u > 0	**u < 0**
Verschiebung nach links.	Verschiebung nach rechts.

Eigenschaften von f(x) = sin(x + u)

	y = f(x) = sin(x)	**y = f(x) = sin(x + u)**
Definitionsbereich:	]-∞; ∞[	]-∞; ∞[
Wertebereich:	[-1; 1]	[-1; 1]
Periodizität:	Periodenlänge: 2π	Periodenlänge: 2π
Nullstellen:	$x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$	$\mathbf{x = k \cdot \pi - u, k \in \mathbb{Z}}$
Maximal Punkte:	$P_{Max}(x; 1)$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$P_{Max}(x; 1)$ $\mathbf{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - u, k \in \mathbb{Z}}$
Minimal Punkte:	$P_{Min}(x; -1)$ $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$P_{Min}(x; -1)$ $\mathbf{x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi - u, k \in \mathbb{Z}}$

3.6.5. Parameter v: Schieben in y-Richtung: $y = \sin(x) + v$; $v \in \mathbb{R}$

Parameter v



Blau:	**Rot:**	**Grün:**
$y = \sin(x)$	$y = \sin(x) + 1$	$y = \sin(x) - 1$

v > 0	**v < 0**
Verschiebung nach oben.	Verschiebung nach unten.

Eigenschaften von f(x) = sin(x) + v

	y = f(x) = sin(x)	**y = f(x) = sin(x) + v**
Definitionsbereich:	]-∞; ∞[	]-∞; ∞[
Wertebereich:	[-1; 1]	**[-1 + v; 1 + v]**
Periodizität:	Periodenlänge: 2π	Periodenlänge: 2π
Nullstellen:	$x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$	**Lösungen der Gleichung:** **0 = sin(x) + v**
Maximal Punkte:	$P_{Max}(x; 1)$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	**$P_{Max}(x; 1 + v)$** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Minimal Punkte:	$P_{Min}(x; -1)$ $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	**$P_{Min}(x; -1 + v)$** $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3.6.6. Sinusfunktion: y = a · sin(b · (x + u)) + v

Musterbeispiel: $y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{3}{2}$

Parameter:

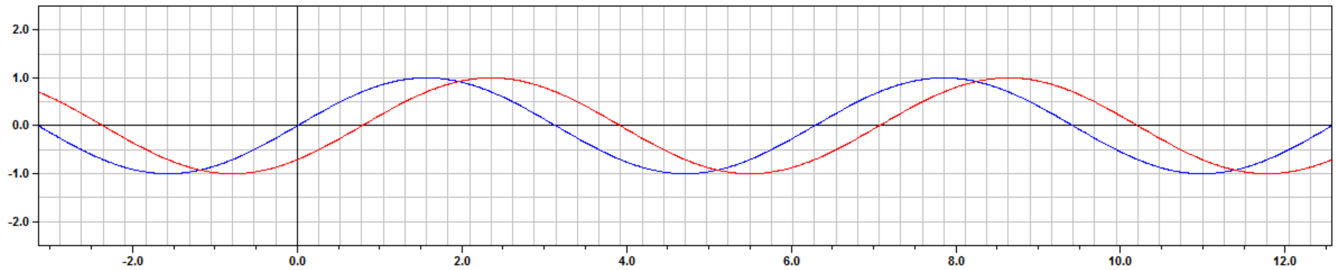
$a = \frac{1}{2}$ ⇒ Stauchung in y-Richtung: Faktor 0.5

$b = 2$ ⇒ Stauchung in x-Richtung: Faktor 2

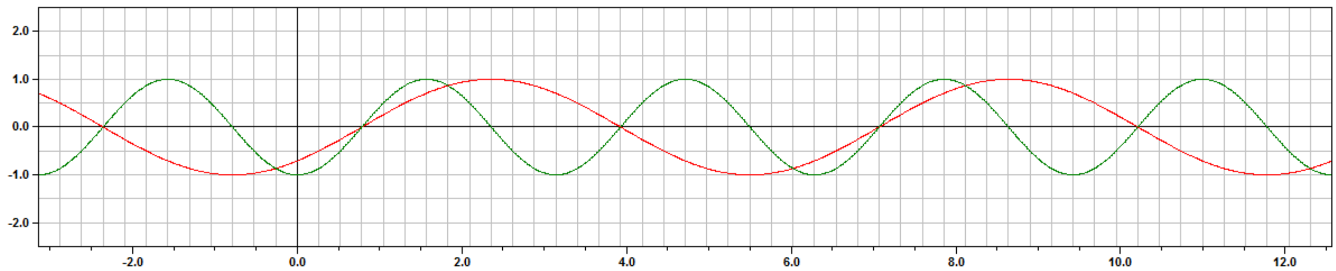
$u = -\frac{\pi}{4}$ ⇒ Verschiebung in x-Richtung: $\frac{\pi}{4}$ nach rechts

$v = \frac{3}{2}$ ⇒ Verschiebung in y-Richtung: $\frac{3}{2}$ nach oben

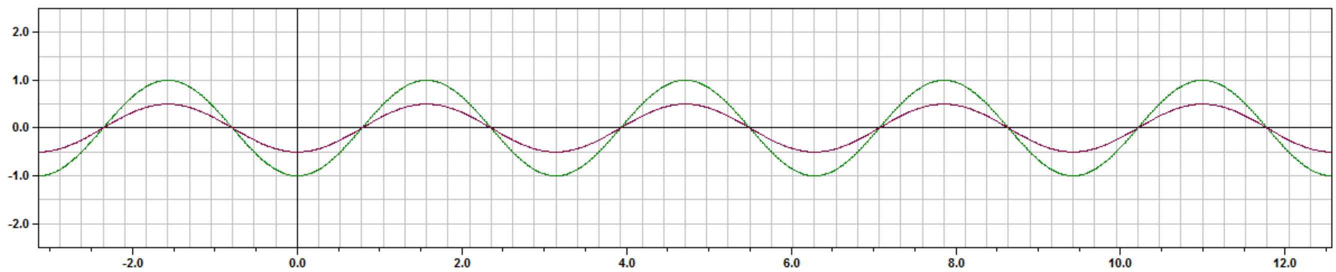
Schritt 1: $\sin(x) \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ Verschiebung in x-Richtung: $\frac{\pi}{4}$ nach rechts



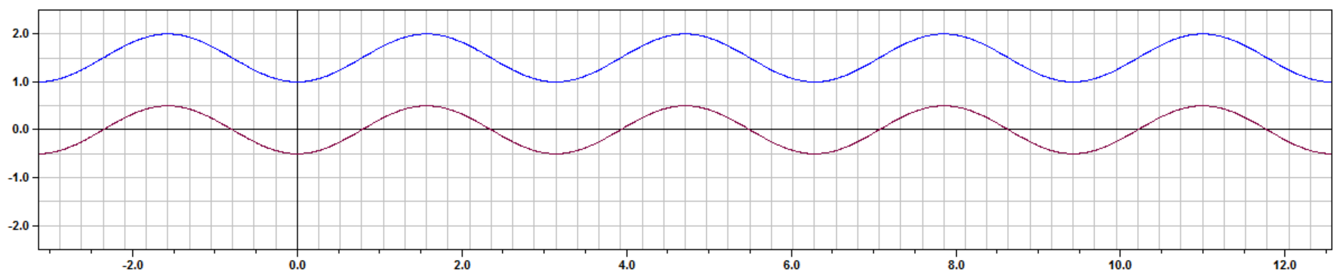
Schritt 2: $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$ Stauchung in x-Richtung: Faktor 2



Schritt 3: $\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$ Stauchung in y-Richtung: Faktor 0.5



Schritt 4: $\frac{1}{2} \cdot \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{3}{2}$ Verschiebung in y-Richtung: $\frac{3}{2}$ nach oben



Eigenschaften von f(x) = a · sin(b · (x + u)) + v

	y = f(x) = a · sin(b · (x + u)) + v
Definitionsbereich:	]-∞; ∞[
Wertebereich:	[-a + v; a + v]
Periodizität:	Periodenlänge: $\frac{2\pi}{b}$
Nullstellen:	Lösungen der Gleichung: 0 = a · sin(b · (x + u)) + v (pro Periode, vgl. 3.4.6. Reduktionsformeln)
Maximal Punkte:	P_{Max}(x; a + v) (*) $x = \frac{\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b} - u, k \in \mathbb{Z}$
Minimal Punkte:	P_{Min}(x; -a + v) (*) $x = \frac{3\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b} - u, k \in \mathbb{Z}$

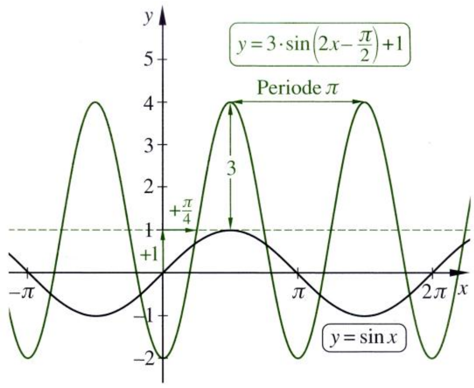
(*) für a < 0 umgekehrt

Zusammenfassung:

Der Graph der Funktionsgleichung **y = f(x) = a · sin(b · (x + u)) + v** mit a ∈ ℝ\{0}, b ∈ ℝ⁺ und u, v ∈ ℝ erfährt im Vergleich zum Graphen von y = f(x) = sin(x) folgende Veränderungen:

- **a** bewirkt eine Veränderung der **Amplitude**: |a|
- **b** bewirkt eine Veränderung der **Periode**: $\frac{2\pi}{b}$
- **u** bewirkt eine **Verschiebung** entlang der **x-Achse** nach links (u > 0) oder rechts (u < 0)
- **v** bewirkt eine **Verschiebung** entlang der **y-Achse** nach oben (d > 0) oder unten (d < 0)

Musterbeispiel: $\mathbf{y = f(x) = 3 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \quad \Rightarrow \quad y = f(x) = 3 \cdot \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 1}$



Die Amplitude ist 3, die Welle schlägt also stärker aus als bei y = sin(x).

Die Periode beträgt π. Die Welle ist um die Hälfte verkürzt.

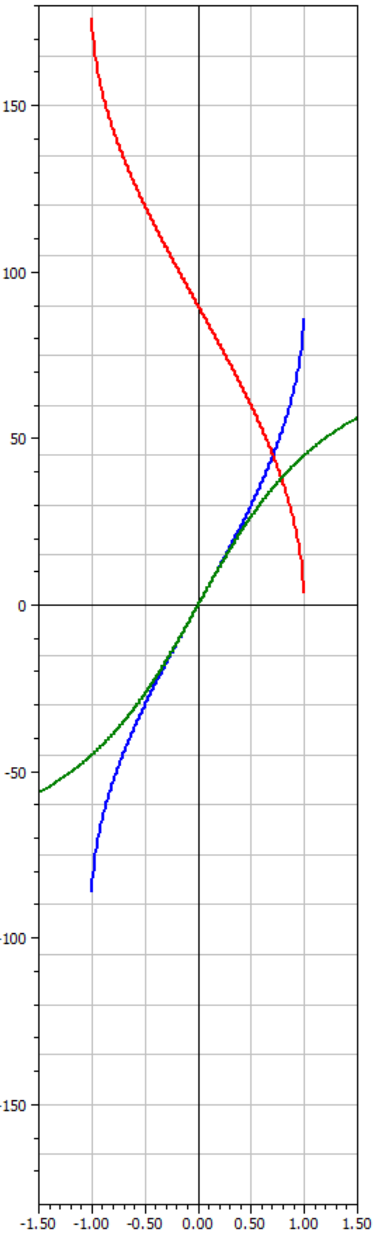
Der Graph ist ausserdem um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts und um 1 nach oben verschoben.

3.7. Graphen der Arkusfunktion

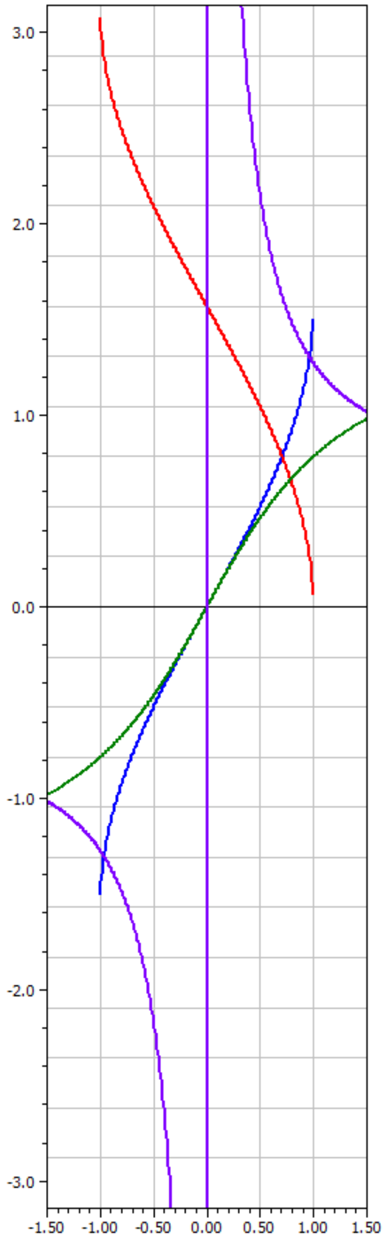
Definition:

Die Arkus-Funktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Winkelfunktionen. Da die Trigonometrischen Winkelfunktionen periodisch sind, können diese nicht vollständig invertiert werden. Wird die Funktion auf ein Monotonie Intervall reduziert, kann diese jedoch invertiert werden.

Blau: **y = f(x) = arc sin(x)**
Rot: **y = f(x) = arc cos(x)**
Grün: **y = f(x) = arc tan(x)**
Violett: **y = f(x) = arc cot(x) = arc tan(x)^-1**



Intervall x-Achse: [-1.5; 1.5]
Intervall y-Achse: [-180°; 180°]
Raster x-Achse: 0.5
Raster y-Achse: 15°



Intervall x-Achse: [-1.5; 1.5]
Intervall y-Achse: [-π rad; π rad]
Raster x-Achse: 0.5
Raster y-Achse: π/12 rad

4. Goniometrie

In der Goniometrie geht es um Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen.

4.1. Grundlagen

Vom Einheitskreis her sind folgende Beziehungen bekannt		
$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$ $\Rightarrow \sin(\alpha)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$ $\Rightarrow \cos(\alpha)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$	Pythagoras am Einheitskreis	
$\tan(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	Ähnlichkeit; Beweis:	$\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\dfrac{\frac{GK}{H}}{\frac{AK}{H}}=\dfrac{GK\cdot H}{AK\cdot H}=\dfrac{GK}{AK}=\tan(\alpha)$
$\cot(\alpha)=\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$	Herleitung:	$\dfrac{1}{\tan(\alpha)}=\dfrac{\frac{AK}{H}}{\frac{GK}{H}}=\dfrac{AK\cdot H}{GK\cdot H}=\dfrac{AK}{GK}$
$\tan(\alpha)\cdot\cot(\alpha)=1$	Beweis:	$\tan(\alpha)\cdot\cot(\alpha)=\dfrac{GK}{AK}\cdot\dfrac{AK}{GK}=1$

4.2. Additionstheoreme

Additionstheoreme
$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$
$\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta)-1}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}$ $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta)+1}{\cot(\alpha)-\cot(\beta)}$

4.3. Winkelfunktionen des doppelten Winkels

Winkelfunktionen des doppelten Winkels
$\sin(2\alpha)=2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$
$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$ $\cos(2\alpha)=2\cdot\cos^2(\alpha)-1$ $\cos(2\alpha)=1-2\cdot\sin^2(\alpha)$
$\tan(2\alpha)=\dfrac{2\cdot\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

4.4. Winkelfunktionen des dreifachen Winkels

Winkelfunktionen des dreifachen Winkels
$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha + \alpha)$ $\sin(3\alpha) = 3 \cdot \sin(\alpha) - 4 \cdot \sin^3(\alpha)$
$\cos(3\alpha) = 4 \cdot \cos^3(\alpha) - 3 \cdot \cos(\alpha)$
$\tan(3\alpha) = \frac{3 \cdot \tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3 \cdot \tan^2(\alpha)}$

4.5. Winkelfunktionen des halben Winkels

Winkelfunktionen des halben Winkels
$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$
$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$
$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}} = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$

4.6. Summen und Differenzen der Funktionen zweier Winkel

Falls die Summe/Differenz zweier Winkel gleich 0 ist, kann keine eindeutige Lösung mehr gefunden werden. Werden die Summen/Differenzen in eine Produkt umgewandelt, dann können wieder beide Fälle (Faktur 1 resp. Faktur 2 = 0) gefunden werden.

Summen und Differenzen der Funktionen zweier Winkel
$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
$\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}$ $\tan(\alpha) - \tan(\beta) = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}$

Summen der Funktionen dreier Winkel
$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\gamma) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \gamma + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \gamma - \beta}{2}\right)$

4.7. Herleitung: sin(3α)

Herleitung: $\sin(3\alpha) = 3 \cdot \sin(\alpha) - 4 \cdot \sin^3(\alpha)$
$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha + \alpha)$ $= \sin(2\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \cos(2\alpha)$ $= 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))$ $= 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha)$ $= 3 \cdot \sin(\alpha) \cdot (1 - \sin^2(\alpha)) - \sin^3(\alpha)$ $= 3 \cdot \sin(\alpha) - 3 \cdot \sin^3(\alpha) - \sin^3(\alpha)$ $= 3 \cdot \sin(\alpha) - 4 \cdot \sin^3(\alpha)$

In ähnlicher Weise können die weiteren Beziehungen für 3-fache Winkel hergeleitet werden.

4.8. Goniometrische Gleichungen

Goniometrische Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Lösungsvariable als Argument von Winkelfunktionen vorkommen.

4.8.1. Grundlagen, Reduktionsformeln

Siehe Grundlagen der Goniometrie sowie die Additionstheoreme. Im weiteren müssen wir oft Reduktionsformeln zum Auffinden von weiteren Lösungen anwenden, so z.B.:

$\sin x = \sin(180° - x) \Rightarrow x_2 = 180° - x_1$

$\cos x = \cos(360° - x) \Rightarrow x_2 = 360° - x_1$

$\tan x = \tan(180° + x) \Rightarrow x_2 = 180° + x_1$

4.8.2. Schritte zum Auflösen goniometrischen Gleichungen

Nicht alle Gleichungen können mit einer einheitlichen Lösungsstrategie gelöst werden.

1. Vereinheitlichung der Argumente.
2. Alles in Sinus, Kosinus oder Tangens schreiben.
3. In die Form $T_1(x) \cdot T_2(x) = 0$ bringen.
4. $T_1(x) = 0$ und $T_2(x) = 0$ getrennt weiterrechnen (untersuchen).
5. Bestimmung des zugehörigen Winkels mit der Arkusfunktion.
6. Bestimmen weiterer Lösungen mithilfe der Reduktionsformeln oder den Graphen.

4.8.3. Verschiedene Aufgaben

Musterbeispiel 1

Aufgabe:

Lösen Sie die Gleichung $\sin(x - 15°) = 0.2831$ nach $x \in G = \{x \mid 0° \leq x \leq 360°\}$ auf.

Lösung:

Wir substituieren zuerst: $z = x - 15°$

Also: $\sin(z) = 0.2831 \Rightarrow z = \arcsin(0.2831) \Rightarrow z_1 = 16.45°$ (mit dem Taschenrechner)

Der Taschenrechner liefert nur eine Lösung. Die restlichen erhalten wir durch überlegen und/oder mit den Reduktionsformeln: $\sin(z) = \sin(180° - z) \Rightarrow z_2 = 180° - z_1 = 180° - 16.45° = 163.55°$

Rücksubstitution: $x_1 = z_1 + 15° = 16.45° + 15° = 31.45°$ und $x_2 = z_2 + 15° = 163.55° + 15° = 178.55°$

Resultat:

$L = \{31.45°; 178.55°\}$

Musterbeispiel 2

Aufgabe:

Finden Sie sämtliche Lösungen der Gleichung $\cos^2(x) = 0.1444$ mit $x \in G = \{x \mid 0° \leq x \leq 360°$.

Lösung:

$$\cos^2(x) = 0.1444 \Rightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{0.1444} = \pm 0.38$$

Fall 1: $\cos(x) = +0.38 \Rightarrow x_1 = \arccos(0.38) = 67.67°$ $\quad x_2 = 360° - x_1 = 360° - 67.67° = 292.3°$

Fall 2: $\cos(x) = -0.38 \Rightarrow x_3 = \arccos(-0.38) = 112.3°$ $\quad x_4 = 360° - x_3 = 360° - 112.3° = 247.7°$

Resultat:

$L = \{67.67°; 112.3°; 247.7°; 292.3°\}$

Musterbeispiel 3

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung sin(x) = cos(x) + 1 mit $x \in G = \{x \mid 0° \leq x \leq 360°\}$.

Lösung:

$\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} \;\Rightarrow\; \sqrt{1 - \cos^2(x)} = \cos(x) + 1$

Durch Quadrieren entsteht eine quadratische Gleichung, die wir durch eine Zerlegung in Faktoren lösen:

$1 - \cos^2(x) = (\cos(x) + 1)^2 \;\Rightarrow\; 1 - \cos^2(x) = \cos^2(x) + 2 \cdot \cos(x) + 1 \;\Rightarrow\; 0 = 2 \cdot \cos^2(x) + 2 \cdot \cos(x) \;\Rightarrow$
$\cos^2(x) + \cos(x) = 0 \;\Rightarrow\; \cos(x) \cdot (\cos(x) + 1) = 0$

Fall 1: $\cos(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \arccos(0) = 90°$ $\quad x_2 = 360° - x_1 = 360° - 90° = 270°$

Fall 2: $\cos(x) + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \cos(x) = -1 \;\Rightarrow\; x_3 = \arccos(-1) = 180°$

Da das Quadrieren eine Gewinnumformung ist, muss die Probe durchgeführt werden:

$x_1 = 90°$	sin(x) = cos(x) + 1	sin(90°) = cos(90°) + 1	1 = 0 + 1 ✓
$x_2 = 270°$	sin(x) = cos(x) + 1	sin(270°) = cos(270°) + 1	$-1 \neq 0 + 1$ ✗ ⇒ keine Lösung!!!
$x_3 = 180°$	sin(x) = cos(x) + 1	sin(180°) = cos(180°) + 1	0 = -1 + 1 ✓

Resultat:

L = {90°; 180°}

Musterbeispiel 4

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung sin(2x) = sin(x) mit $x \in G = \{x \mid 0° \leq x \leq 360°\}$.

Lösung:

$\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ [Siehe 4.3. Winkelfunktionen des doppelten Winkels]

Also: $2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(x) \;\Rightarrow\; 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) = 0 \;\Rightarrow\; \sin(x) \cdot (2 \cdot \cos(x) - 1) = 0$

Fall 1: **$\sin(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0°$, $x_2 = 180°$ und $x_3 = 360°$** [!!!]

Fall 2: $2 \cdot \cos(x) - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot \cos(x) = 1 \;\Rightarrow\; \cos(x) = 0.5 \;\Rightarrow\; x_4 = 60°$ und $x_5 = 300°$

Resultat:

L = {0°; 60°; 180°; 300°; 360°}

5. Vektorgeometrie

Ein **Vektor** ist festgelegt durch eine **Länge** (Grösse) und eine **Richtung**.

Freie Vektoren
Sie beschreiben Merkmale,
bei denen es nur auf **Grösse** und **Richtung** ankommt

Ortsvektoren
Sie beschreiben Merkmale,
bei denen es auf **Grösse**, **Richtung** und **Anfangspunkt** ankommt

5.1. Grunddefinition

Unter einem **Ortsvektor** $\vec{\mathbf{v}}$ versteht man eine **Strecke**, bei der der eine der beiden Begrenzungspunkte als **Anfangspunkt** P, der andere **Endpunkt** Q festgelegt ist.

Man schreibt: $\vec{\mathrm{v}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

Unter dem **Betrag** eines Vektors $\vec{\mathrm{v}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ versteht man die **Länge** der Strecke PQ.

Man schreibt: $|\vec{\mathrm{v}}|$

Der Vektor $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ ist der **Gegenvektor** vom Vektor $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Der **Nullvektor** ist der Vektor, dessen Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen.

Der Nullvektor hat **keine Länge**, d.h. der Betrag ist Null: $|\vec{0}| = 0$
Da der Nullvektor ein Punkt ist, und ein Punkt **keine Richtung** hat, hat der Nullvektor auch keine Richtung. Er ist dadurch zu allen Vektoren senkrecht sowie auch parallel.

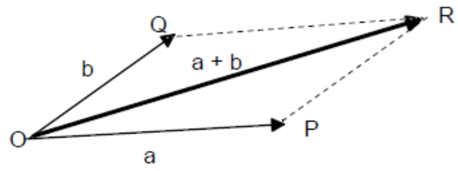
freier Vektor	Ortsvektor
▪ Richtung ▪ Betrag	▪ Richtung ▪ Betrag ▪ Anfangspunkt

5.2. Grundrechenarten

5.2.1. Addition von Vektoren

Die Addition von Vektoren

Es seien $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OQ}$ zwei Vektoren. Dann setzt man $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{OR}}$ wobei R der 4. Eckpunkt des Parallelogramms mit den weiteren Ecken O, P, Q ist.



Rechengesetze	
Kommutativgesetz	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
Assoziativgesetz	$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
Neutralelement	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
Inverselement	$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ und $(-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

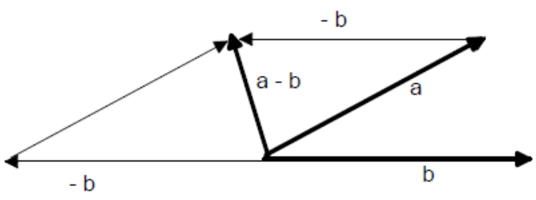
5.2.2. Subtraktion von Vektoren

Die Subtraktion von Vektoren

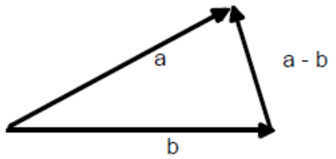
$\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + \left(-\vec{\mathbf{b}}\right)$

D.h. Vektor $\vec{b}$ wird subtrahiert indem $-\vec{b}$ addiert wird.

Ortsvektoren:



freie Vektoren:



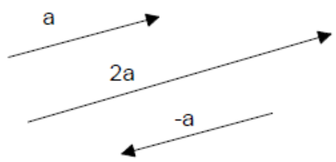
5.2.3. Multiplikation mit einer Zahl

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

Der **Betrag** einer Zahl a

$$|a| = \begin{cases} a, & \mathit{für}\ a < 0 \\ 0, & \mathit{für}\ a = 0 \\ -a, & \mathit{für}\ a \geq 0 \end{cases}$$

$\mathbf{r \cdot \vec{a}}$ **= r-facher Vektor** $\mathbf{\vec{a}}$



$\mathrm{r} > 0$: $r \cdot \vec{\mathrm{a}} = \mathrm{r} -$ facher Vektor $\vec{\mathrm{a}}$ mit gleicher Richtung und Orientierung wie $\vec{\mathrm{a}}$

$\mathrm{r} = 0$: $r \cdot \vec{\mathrm{a}} = 0 \cdot \mathrm{a} = \vec{0}$

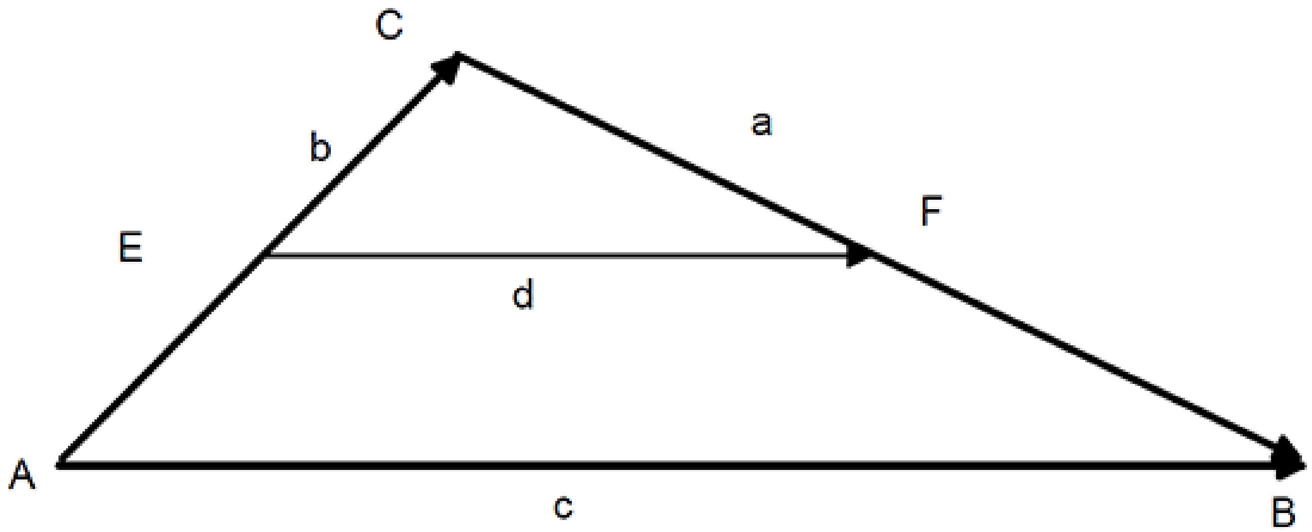
$\mathrm{r} < 0$: $r \cdot \vec{\mathrm{a}} = |\mathrm{r}| \cdot -$facher a mit umgekerhter Orientierung wie $\vec{\mathrm{a}}$

Rechengesetze	
I)	$\mathrm{r} \cdot (\vec{\mathrm{a}} + \vec{\mathrm{b}}) = \mathrm{r} \cdot \vec{\mathrm{a}} + \mathrm{r} \cdot \vec{\mathrm{b}}$
II)	$(\mathrm{r} + \mathrm{s}) \cdot \vec{\mathrm{a}} = \mathrm{r} \cdot \vec{\mathrm{a}} + \mathrm{s} \cdot \vec{\mathrm{a}}$
III)	$(\mathrm{r} \cdot \mathrm{s}) \cdot \vec{\mathrm{a}} = \mathrm{r} \cdot (\mathrm{s} \cdot \vec{\mathrm{a}})$
IV)	$1 \cdot \vec{\mathrm{a}} = \vec{\mathrm{a}}$
V)	$-1 \cdot \vec{\mathrm{a}} = -\vec{\mathrm{a}}$

5.2.4. Beweise mit der Vektorrechnung durchführen

Beispiel 1

Beweisen Sie, dass die Mittenlinie (Verbindung zweier Seitenmittelpunkte) in einem allgemeinen Dreieck parallel zur Grundlinie und halb so lang wie diese ist.



Bezeichnungen:

- $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$
- $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$
- $\vec{d} = \overrightarrow{EF}$ Der Punkt E befindet sich in der Mitte von AC, der Punkt F in der Mitte von CB.

Folgerungen:

- $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\vec{b}$
- $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FB} = \frac{1}{2}\vec{a}$

Zu zeigen:

I) $\vec{d} || \vec{c}$

II) $|\vec{d}| = \frac{1}{2}|\vec{c}|$

Diese beide Bedingungen werden mit der Gleichung $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{c}$ erfüllt.

Beweis 1. Variante:

Im oberen kleinen Dreieck gilt: $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{c}$ qed.

Beweis 2. Variante:

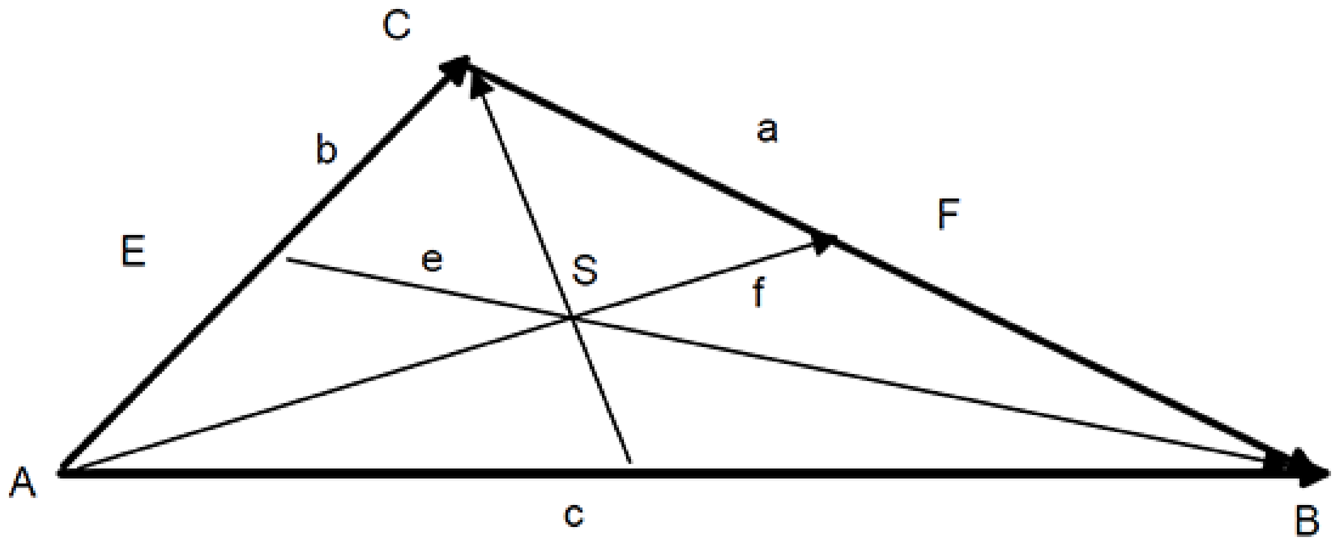
Im unteren Teil, Trapez gilt: $\vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$

Es gilt (siehe „Folgerungen“): $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$

Also: $\vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{b} + \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{c}$ qed.

Beispiel 2

Zeigen Sie, dass in einem Dreieck, die Schwerelinien sich im Verhältnis 2:1 teilen.



<u>Bezeichnungen:</u>

- $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$
- $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$
- $\vec{e} = \overrightarrow{EB}$ Der Punkt E befindet sich in der Mitte von AC.
- $\vec{f} = \overrightarrow{AF}$ Der Punkt F befindet sich in der Mitte von CB.

<u>Folgerungen:</u>

- $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\vec{e} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}$
- $\vec{f} = \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$

<u>Zu zeigen:</u> $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\vec{f}$ resp. $\overrightarrow{SB} = \frac{2}{3}\vec{e}$

<u>Beweis:</u> $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} + \vec{a}$ resp. $\vec{c} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} = x \cdot \overrightarrow{AF} + y \cdot \overrightarrow{EB} = x \cdot \vec{f} + y \cdot \vec{e}$

Es gilt (siehe „Folgerungen“): $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a} = x \cdot \vec{f} + y \cdot \vec{e}$

resp. $\vec{b} + \vec{a} = x \cdot \left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) + y \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}\right)$

und somit: $\vec{b} + \vec{a} = x \cdot \vec{b} + \frac{x}{2} \cdot \vec{a} + \frac{y}{2} \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{a} \quad = \quad \left(\frac{x}{2} + y\right) \cdot \vec{a} + \left(x + \frac{y}{2}\right) \cdot \vec{b}$

resp. deutlicher Formuliert: $1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = \left(\frac{x}{2} + y\right) \cdot \vec{a} + \left(x + \frac{y}{2}\right) \cdot \vec{b}$

Somit gilt das Gleichungssystem: I) $\left(\frac{x}{2} + y\right) = 1$

II) $\left(x + \frac{y}{2}\right) = 1$

Welches die Lösungen x = y = $\frac{2}{3}$ hat. Und damit haben wir es bewiesen.

5.3. Skalarprodukt

Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ wird das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wie folgt definiert.

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}| \cdot |\vec{\mathbf{b}}| \cdot \mathbf{cos}(\boldsymbol{\varphi})$$

Wobei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren ergibt eine Zahl (ein Skalar).

Rechengesetze	
I)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
II)	$(r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (r \cdot \vec{b})$
III)	$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ und $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
IV)	$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a})^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2$
V)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander oder mindestens einer der beiden Vektoren ist der Nullvektor.

Auf den Winkel aufgelöst:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{resp.} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) \quad \text{resp.} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\right)$$

Beispiel: $(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})^2$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \underbrace{(\vec{a} + \vec{b})}_{\vec{c}} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$= |\vec{a}|^2 + 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi + |\vec{b}|^2$ und somit eine Zahl.

5.4. Vektorprodukt

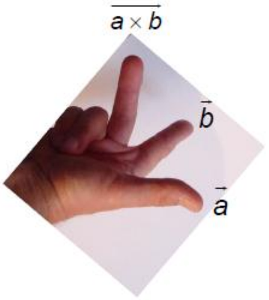
Das Vektorprodukt $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ der Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist ein **Vektor** mit den 3 folgenden Eigenschaften:

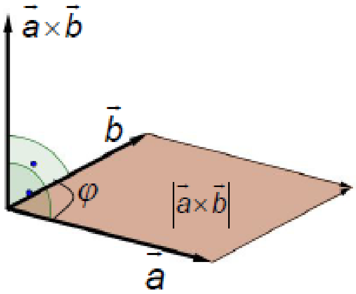
I) Richtung: $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

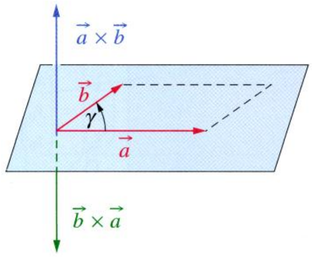
II) Orientierung: $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein „Rechtssystem".

III) Betrag: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ Wobei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Das Vektorprodukt von 2 Vektoren ist ein Vektor mit 3 speziellen Eigenschaften.



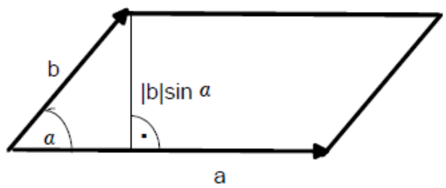




Rechengesetze	
I)	$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ („Anti KG")
II)	$(r \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (r \cdot \vec{b})$
III)	$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ und $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
IV)	$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel, oder mindestens einer der beiden Vektoren ist der Nullvektor.
V)	$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
VI)	$\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$

Geometrische Interpretation des Vektorproduktes

Die **Länge** (resp. der Betrag) des **Vektors** $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ entspricht der **Fläche** des durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten **Parallelogramms**.



Beispiele:

$(r\vec{a}) \times (r\vec{b}) = (r\vec{a}) \times \vec{c} = r(\vec{a} \times \vec{c}) = r\left(\vec{a} \times (r\vec{b})\right) = r\left(r(\vec{a} \times \vec{b})\right) = r^2(\vec{a} \times \vec{b})$

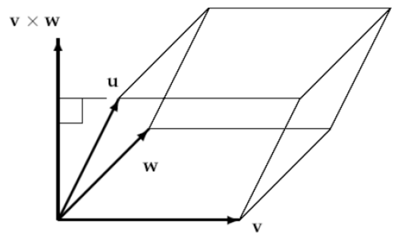
$(r\vec{a}) \times (s\vec{b}) = (r\vec{a}) \times \vec{c} = r(\vec{a} \times \vec{c}) = r\left(\vec{a} \times (s\vec{b})\right) = r\left(s(\vec{a} \times \vec{b})\right) = rs(\vec{a} \times \vec{b})$

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2$

$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = -2(\vec{a} \times \vec{b}) = 2(\vec{b} \times \vec{a})$

$(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}$

5.5. Spatprodukt

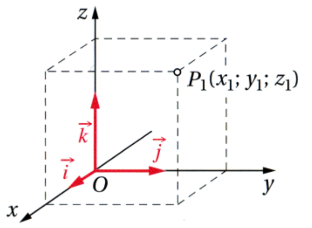
Spatprodukt (Gemischtes Produkt)	
Das **Spatprodukt** $\left|(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\mathbf{u}}\right|$ der Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ entsprechen dem **Volumen** des von ihnen aufgespannten **Parallelepipeds**.	

Die Länge (in LE) des Vektors $|\vec{c}| = |(\vec{v} \times \vec{w})|$ entspricht der Fläche (in FE) der Grundfläche.
Mit dem Skalarprodukt $|\vec{c} \cdot \vec{u}| = |(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}|$ haben wir nichts anderes gemacht als Grundfläche mal Höhe und somit genau das Volumen dieses Parallelepipeds.

5.6. Vektorrechnung mit Koordinaten in R^3

Kartesisches Koordinatensystem

- Wir wählen im Raum einen Nullpunkt 0 und ein kartesisches Koordinatsensystem mit x-, y und z-Achse.
- Die Orientierung wird mit der "Rechte-Hand-Regel" gemacht: der Daumen der rechten Hand zeigt in Richtung der x-Achse, der Zeigfinger in Richtung der y-Achse somit muss die z-Achse in Richtung des Mittelfingers zeigen.



5.6.1. Einheitsvektoren

Kartesisches Koordinatensystem

Die folgenden Ortsvektoren werden **Einheitsvektoren** genannt:

I) $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

II) $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ} = \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

III) $\vec{k} = \overrightarrow{OK} = \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenschaften der Einheitsvektoren

- Die Einheitsvektoren haben die Länge 1.
- Sie stehen paarweise senkrecht aufeinander.
- $\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = \vec{\imath}^2 = \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\jmath}^2 = \vec{k} \cdot \vec{k} = \vec{k}^2 = 1$
- $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\imath} \cdot \vec{k} = \vec{\jmath} \cdot \vec{k} = 0$
- $\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$
- $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \qquad \vec{\jmath} \cdot \vec{k} = \vec{\imath} \qquad \vec{k} \cdot \vec{\imath} = \mathrm{j}$

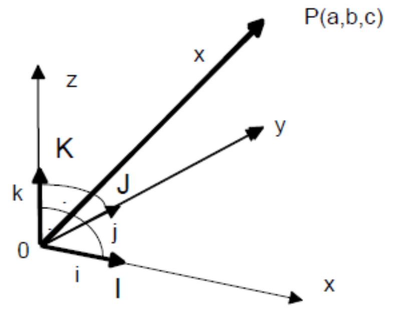
5.6.2. Komponenten eines Ortsvektor

Komponenten und Koordinaten des Ortsvektors

$\vec{x} = a \cdot \vec{\imath} + b \cdot \vec{\jmath} + c \cdot \vec{k}$

Die Zahlen a, b und c heissen **Komponenten** des **Ortsvektors $\vec{x}$** $= \overrightarrow{OP}$

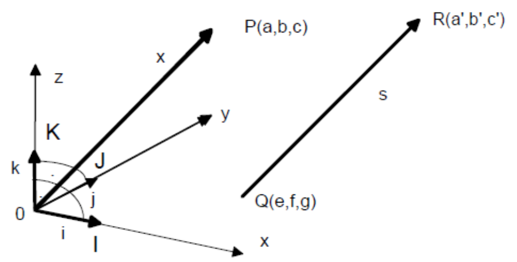
Die Zahlen a, b und c sind aber auch die **Koordinaten** des **Punktes P(a,b,c)**.



5.6.3. Komponenten des freien Vektors

Komponenten und Koordinaten des freien Vektors

Der freie Vektor $\vec{s} = \overrightarrow{QR}$ wird mit den gleichen Komponenten beschrieben wie sein entsprechender Ortsvektor, der vom Nullpunkt aus geht.



5.6.4. Rechenregeln für Vektoren (Ortsvektoren und freie Vektoren)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

I) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^n$

II) $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^n$

III) $r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$ $\quad r \in \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^n$

IV) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ $\mathbb{R}^n$

V) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^3$

VI) Die Länge des Vektors $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ $\mathbb{R}^n$

VII) Der Kosinus des Winkel zwischen den Vektoren ist gegeben durch: $\mathbb{R}^n$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 \; + \; a_2 \cdot b_2 \; + \; a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

VIII) Der Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$: $\mathbb{R}^n$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

IX) $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^3$

resp. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \mathrm{Det}(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

5.6.5. Verschiedene Aufgaben

Aufgabe 1:

In welchen Punkt wird der Punkt A(5/-1/0) bei der Verschiebung um $\vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$ verschoben?

Lösung:

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} + \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ B(13/-8/-3)

Resultat:
In den Punkt B(13/-8/-3).

Aufgabe 2:

Welcher Winkel ist zwischen den Vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$?

Lösung:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\right)$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{3 \cdot -4 + 2 \cdot 2 + 1.5 \cdot -2}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1.5^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-2)^2}}\right) = \arccos\left(\frac{-11}{\sqrt{15.25} \cdot \sqrt{24}}\right) = 125.098°$$

Resultat:
Der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{s}$ ist 125.098°.

Aufgabe 3:

Stehen die zwei Vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ und $\vec{q} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander?

Lösung 1:
$\vec{r} \cdot \vec{q} = r_1 \cdot q_1 + r_2 \cdot q_2 + r_3 \cdot q_3 = 3 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 + 1.5 \cdot 4 = 0$ (vgl. 5.3 Rechengesetze V))

Lösung 2:
Zwischenwinkel rechnen: $\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) \Rightarrow$ der Winkel beträgt 90°

Resultat:
Die zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

Aufgabe 4:
Wie weit sind die Punkte P(1/4/-4) und T(-5/1/-2) auseinander?

Lösung:

$$\vec{a} = P - T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = 7\ [\mathrm{LE}]$$

Resultat:
Die Punkte sind 7 [LE] auseinander.

Aufgabe 5:

Welchen Flächeninhalt besitzt das Dreieck, das durch die Punkte Q(-2/-1/4), R(0/1/1) und S(-4/-2/0) gebildet wird?

Lösung 1:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -4 & - & -3 \cdot -1 \\ -3 \cdot -2 & - & 2 \cdot -4 \\ 2 \cdot -1 & - & 2 \cdot -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{c}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \sqrt{(-11)^2 + 14^2 + 2^2} = 17.92\ [\text{FE}]$$

$$F = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2} = \frac{17.92}{2} = 8.96\ [\text{FE}]$$

Lösung 2:

$$F = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)}{2} = \frac{\sqrt{17} \cdot \sqrt{26} \cdot \sin(58.45°)}{2} = 8.96\ [\text{FE}]$$

Resultat:

Die Fläche des Dreiecks beträgt 8.96 [FE]

Aufgabe 6:

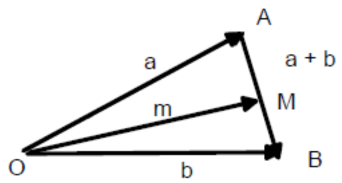
Wie lautet die allgemeine Formel zum Bestimmen des Mittelpunktes einer Geraden?

Resultat:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

oder

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$



Aufgabe 7:

Liegt der Punkt C(-8/8/-6) auf der Geraden durch die Punkte A(-2/5/-4) und B(10/-1/0)?

Lösung 1:

Der Punkt C liegt auf der Geraden wenn die drei Punkte resp. die zwei daraus gebildeten Vektoren linear abhängig sind.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{a} \cdot (-2) = \vec{b} \text{ und } \vec{a} \cdot 3 = \vec{c}$$ ⇒ linear abhängig!

Lösung 2:

Wenn der Betrag des Vektorproduktes, der beiden Vektoren, 0 ist liegen die Punkte auf einer Geraden.

Resultat:

Ja, der Punkt C(-8/8/-6) liegt auf der Geraden durch die Punkte A(-2/5/-4) und B(10/-1/0)

Aufgabe 8:
Bilden die Punkte A(6/-3/4), B(2/7/-5) und C(-4/22/-18) ein Dreieck?

Lösung:
Wenn zwei aus den 3 Punkten gebildeten Vektoren linear abhängig sind, so liegen die 3 Punkte auf einer Geraden, ansonsten bilden sie ein Dreieck.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 22 \\ -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \\ -22 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 22 \\ -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ sind NICHT linear abhängig} \Rightarrow \text{Dreieck}$$

Resultat:
Ja, die drei Punkte A(6/-3/4), B(2/7/-5) und C(-4/22/-18) bilden ein Dreieck.

Aufgabe 9:
Bestimmen Sie den Punkt D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist.
A(4/0/0), B(-7/0/6), C(3/8/-2)

Lösung:
Im Parallelogramm werden die Ecken im Gegenuhrzeigersinn angeschrieben. Somit müssen für das Parallelogramm folgende Bedingungen erfüllt sein: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{D(14/8/-8)}$$

Resultat:
Der Punkt lautet: D(14/8/-8).

Aufgabe 10:

a) Beweisen Sie, dass das Viereck A(6/4/-3), B(8/9/11), C(-2/-1/16) und D(-4/-6/2) ein Rechteck ist.
b) Berechnen Sie die Fläche mit der normalen Flächenformel.
c) Berechnen Sie die Fläche mit dem Vektorprodukt ohne Koordinaten.
d) Berechnen Sie die Fläche mit dem Vektorprodukt mit Koordinaten.

Lösung:

a) Zu zeigen, dass alle Winkel 90° betragen; d.h. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ und $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ und $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$

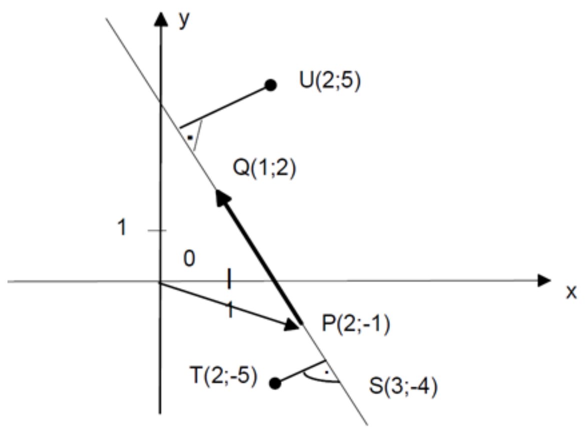
b) $F = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{225} \cdot \sqrt{225} = 225$

c) $F = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin(\alpha = 90°) = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{225} \cdot \sqrt{225} = 225$

d) $F = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left| \begin{pmatrix} 165 \\ -150 \\ 30 \end{pmatrix} \right| = 225$

5.7. Geradengleichung in R^2

Geradengleichung in der Ebene



Explizite Darstellung: (y = …)
$$y = mx + b$$

Implizite Darstellung: (… = 0)
$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

Parameterdarstellung:
$$\vec{r} = \underbrace{\vec{r_0}}_{\text{Ortsvektor}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor}}$$

Von einer Geraden seien 2 Punkte gegeben. Z.B. P(2/-1) und Q(1/2).

Fakt 1: Durch Anwenden der 2 Punkte-Gleichung $\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}\right)$ kann die (explizite) Darstellung der Geradengleichung hergeleitet werden, sie lautet: y = -3x + 5

Fakt 2: Die Gl. 3x + y – 5 = 0 oder 6x + 2x – 10 = 0 beschreibt ebenfalls die Gerade y = -3x + 5.

Definition: Ax + By + C = 0 heisst Koordinatengleichung der Gerade, es ist eine implizierte Darstellung der Geradengleichung.

Fakt 3: Man kann 2 beliebige Punkte auf der Gerade wählen (z.B. P(2/-1) und Q(1/2)) und deren Ortsvektoren betrachten. Die Subtraktion der 2 Ortsvektoren ergeben einen Richtungsvektor der Geraden: $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{PQ}}} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

Fakt 4: Man kann jeden beliebigen Punkt X auf der Geraden beschreiben mit $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$.

Folgerung: Die Parametergleichung der Geraden: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$.
Im Beispiel resultier die Gleichung: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Es gibt natürlich unendlich viele versch. Parametergleichungen, denn jeder Punkt der Geraden kann Ausgangspunkt sein. Zudem gibt es unendlich viele mögliche Richtungsvektoren. Sie unterscheiden sich aber nur in der Länge und Orientierung, nicht aber in der Richtung.

Fakt 5: Sei $\begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor der Parametergleichung, dann steht der Vektor $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor; es ist ein Normalenvektor der Geraden (d.h. der Normalenvektor steht senkrecht zur Geraden).
Im Beispiel ist der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Geraden: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Mit dem Berechnen des Skalarprodukts $\begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = B \cdot A + (-A) \cdot B$ ist das schnell gezeigt.

5.7.1. Zusammenstellung der verschiedenen Gleichungen und Angaben

1) Explizite Darstellung der Geradengleichung lautet: y = -3x + 5
2) Eine implizite Darstellung der Geradengleichung lautet: 3x + y – 5 = 0
3) Eine Parameterdarstellung der Geradengleichung lautet: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
4) Ein Normalenvektor der Geradengleichung lautet: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fazit: Betrachten wir die implizite Darstellung der Geradengleichung Ax + By + C = 0.

i) Die explizite Form lautet dann: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

ii) Ein Normalenvektor kann sofort abgelesen werden, nämlich: $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

iii) Ein Richtungsvektor lautet dann $\begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}$

iv) und somit die Parametergleichung: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t \cdot \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$

5.7.2. Beispiele Parametergleichung

Frage 1: Wie bestimmt man aus 2 Punkten eine implizite Form der Geradengleichung?

Antwort: Man berechnet aus den 2 Punkten die explizite Form (siehe Fakt 1) und formt sie um.

Frage 2: Wie bestimmt man die Parametergleichung $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t \cdot \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$?

Antwort: Ortsvektor $\overrightarrow{r_0}$ bestimmen:
Man kann von einem der beiden gegebenen Punkte den Ortsvektor nehmen.
Eine andere Möglichkeit ist, dass in der (impliziten oder expliziten) Geradengleichung ein beliebiges x eingesetzt und das zugehörige y berechnet wird. Von diesem Punkt nehmen wir dann der Ortsvektor. Z.B. y = -3x + 5, wir wählen x = 10, dann ist y = -25 und somit lautet der Ortsvektor $\overrightarrow{r_0} = \begin{pmatrix} 10 \\ -25 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$ bestimmen:
Aus der impliziten Geradengleichung kann direkt A resp. B abgelesen werden:

$$\mathbf{A}x + \mathbf{B}y + C = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{3}x + \mathbf{1}y - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}}^{\text{Normalenvektor}} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}}^{\text{Richtungsvektor}}$$

Somit lautet die Parametergleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ -25 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Frage 3: Angenommen die Parametergleichung einer Geraden sei gegeben, wie bestimmt man die implizite resp. explizite Form der Geradengleichung?

Antwort: Dazu gibt es 2 Möglichkeiten. Betrachten wir diese an der Parametergleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ -25 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Lösung 1: Wir schreiben die Parametergleichung detaillierter auf: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -25 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

Daraus folgen die 2 Gleichungen:

I) x = 10 + 2t

II) y = -25 – 6t

Mit der Additionsmethode kann t eliminiert werden (in diesem Beispiel wird I) mit 3 multipliziert und zur Gleichung II) hinzu addiert).

Es Resultiert: 3x + y = 5 resp. y = -3x + 5 (explizite Form) resp. 3x + y – 5 = 0 (implizite Form), was mit unserer Ausgangsgleichung übereinstimmt.

Lösung 2: Aufgrund der Parametergleichung kennen wir einen Normalenvektor (vgl. Fakt 5): $\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Somit lautet die implizite Form der Geradengleichung wie folgt: -6x – 2y + C = 0.

Durch Einsetzen eines Punktes, z.B. (10; -25), können wir C bestimmen:

-6 · 10 – 2 · (-25) + C = 0 daraus folgt: C = 10.

Also lautet die implizite Form: -6x – 2y + 10 = 0 resp. durch die Division mit (-2) lautet sie 3x + y – 5 = 0, was wiederum mit unserer Ausgangsgleichung übereinstimmt.

5.7.3. Hesse'sche Normalenform

Die Gleichung $\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ heisst Hesse'sche Normalenform der Gerade.

Wird die Gleichung erfüllt, liegt der Punkt auf der Geraden,
andernfalls resultiert der Abstand zur Geraden (inkl. auf welcher Seite).

Die Gleichung wird genau von den Punkten erfüllt, die auf der Geraden (welche die Gleichung beschreibt) liegen.
Liegt der Punkt nicht auf der Geraden, so liefert die Hesse'sche Normalenform den Abstand vom Punkt zur Geraden. Das Vorzeichen gibt an, ob der Punkt auf der Seite der Geraden liegt, in deren Richtung der Normalenvektor zeigt, oder ob er auf der anderen Seite der Geraden liegt.

Fortsetzung des Beispiels (vgl. 5.7. Geradengleichung in R^2)

Wir betrachten die Geradengl. 3x + y – 5 = 0 und bestimmen die HN: $\frac{3x+y-5}{\sqrt{3^2+1^2}} = 0$ resp. $\frac{3x+y-5}{\sqrt{10}} = 0$

Wir testen die Punkte S(3; -4), T(2; -5) und U(2; 5).
Der Punkt S in die HN eingesetzt ergibt: $\frac{3\cdot 3+(-4)-5}{\sqrt{10}} = \frac{9-9}{\sqrt{10}} = 0$, somit liegt S auf der Geraden.

Der Punkt T in die HN eingesetzt ergibt: $\frac{3\cdot 2+(-5)-5}{\sqrt{10}} = \frac{6-10}{\sqrt{10}} = \frac{-4}{\sqrt{10}} = -1.265$, somit liegt T nicht auf der Geraden. Der Punkt T hat einen Abstand von 1,256 LE von der Gerade und liegt dem Normalenvektor entgegengesetzt.

Der Punkt U in die HN eingesetzt ergibt: $\frac{3\cdot 2+5-5}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = 1.897$, somit liegt U nicht auf der Geraden. Der Punkt U hat einen Abstand von 1,897 LE von der Gerade und liegt auf der „positiven" Seite der Geraden.

5.7.4. Schnittpunkt von 2 Geraden

Das Bestimmen vom Schnittpunkt zweier Geraden, gegeben je durch eine Gleichung in der Form y = ax + b wird in der Algebra Zusammenfassung im Kapitel 6. Lineare Funktionen, resp. 6.6. Schnittpunkt zweier Geraden behandelt.

Das Bestimmen vom Schnittpunkt zweier Geraden, die je durch eine Parametergleichung gegeben sind kann wie folgt gelöst werden.

Beispiel 1: Zwei sich schneidende Geraden

Gegeben seien die zwei Geraden: $\overrightarrow{\mathrm{r_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathrm{t} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{\mathrm{r_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{s} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Da die zwei Richtungsvektoren nicht kolinear sind, also nicht durch Multiplikation einer Zahl ineinander überführen lässt, müssen die 2 Geraden einen Schnittpunkt haben.

Die Parametergleichungen detaillierter aufgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \; resp. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgen die 2 Gleichungen:

I) 1 – 2t = 0 + s
II) 7 + 3t = -2 + 2s

Durch Lösen des Gleichungssystem erhalten wir t = -1 und s = 3. In die Parametergleichungen eingesetzt, ergibt in beiden Fällen den Punkt V(3; 4), den Schnittpunkt der beiden Geraden.

Beispiel 2: Zwei parallele Geraden

$\overrightarrow{\mathrm{r_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathrm{t} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{\mathrm{r_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{s} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (Beide Geraden haben den gleichen Richtungsvektor)

Daraus folgen die 2 Gleichungen:

I) 1 – 2t = 0 - 2s
II) 7 + 3t = -2 + 3s

Beide Variablen fallen weg und es bleibt die unerfüllbare Aussage 17 = -4 übrig.

Beispiel 3: Zwei identische Geraden

$\overrightarrow{\mathrm{r_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathrm{t} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{\mathrm{r_2}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix} + \mathrm{s} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (Beide Geraden haben den gleichen Richtungsvektor)

Daraus folgen die 2 Gleichungen:

I) 1 – 2t = -1 - 2s
II) 7 + 3t = 10 + 3s

Beide Variablen fallen weg und es bleibt die allgemeingültige Aussage 17 = 17 übrig.

5.7.5. Verschiedene Aufgaben

Gegeben seien die zwei Punkte A(2/-2) und B(-4/1).

Aufgabe a) Bestimmen sie eine Parametergleichung der Geraden durch diese zwei Punkte.

Lösung a) $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t \cdot \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$

Punkt A als Ortsvektor verwenden: $\overrightarrow{r_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Richtungsvektor zwischen den Punkten A und B berechnen: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Parametergleichung lautet: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ resp. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe b) Rechnen sie die Parametergleichung zu einer impliziten Form um.

Lösung b) $Ax + By + C = 0$, Parametergleichung detailliert aufschreiben: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gleichungssystem lösen: (Variable t eliminieren)

I) x = 2 – 2t

II) y = -2 + t

I) + 2 * II) ergibt: x + 2y = -2 Daraus folgt die implizite Form: x + 2y + 2 = 0.

Aufgabe c) Formulieren Sie nun die explizite Form.

Lösung c) x + 2y + 2 = 0 auf y auflösen ergibt die explizite Form: $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

Aufgabe d) Bestimmen Sie aus der Parametergleichung einen Normalenvektor, und bestimmen Sie danach die implizite Form. Vergleichen Sie das Resultat mit dem Resultat von b).

Lösung d) Normalenvektor aus der Parametergleichung (Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$) bestimmen:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ resp. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und somit x + 2y + C = 0.

Durch Einsetzen von (z.B.) Punkt B ergibt das -4 + 2 + C = 0, resp. C = 2 und somit die implizite Form: x + 2y + 2 = 0.

Aufgabe e) Bestimmen Sie die Hess'sche Normalenform.

Lösung e) $\frac{x+2y+2}{\sqrt{1^2+2^2}} = 0$ resp. $\frac{x+2y+2}{\sqrt{5}} = 0$

Aufgabe f) Liegt der Punkt P(2/5) auf der Geraden, wenn nicht, welchen Abstand zur Geraden besitzt er?

Lösung f) P(2/5) in HN eingesetzt: $\frac{2+2\cdot 5+2}{\sqrt{5}} = \frac{14}{\sqrt{5}} = 6.261$. Der Punkt liegt nicht auf der Geraden, er hat einen Abstand von 6.261 LE.

Aufgabe g) Wie muss die x-Koordinate des Punktes Q(a/6) lauten, damit der Punkt auf der Geraden liegt?

Lösung g) Q(a/6) in HN eingesetzt: $\frac{a+2\cdot 6+2}{\sqrt{5}} = 0$ ergibt die Gl. für a: a + 14 = 0 resp. a = -14.

Der Punkt Q(-14/6) liegt auf der Geraden.

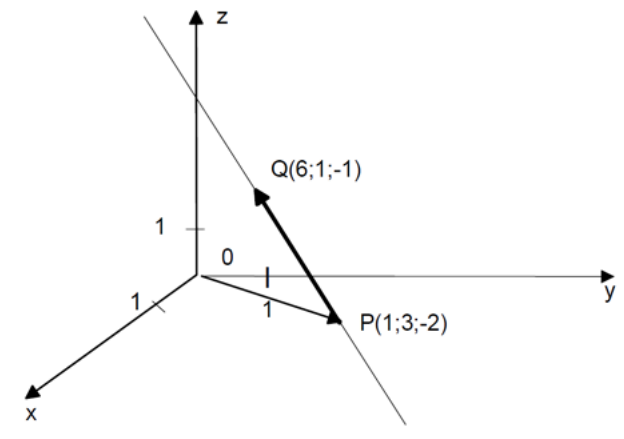
Aufgabe h) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der Geraden y = -3x + 5.

Lösung h) Entweder führt man beide Gleichungen auf die implizite Form, oder beide auf die parameterform. Nur so kann der Schnittpunkt berechnet werden.

Es resultiert der Schnittpunkt S(2,4/-2,2).

5.8. Geradengleichung in R^3

Geradengleichung im Raum



Eine Gerade im Raum kann nur mit der Parametergleichung beschrieben werden.

Es gibt weder die implizite noch explizite Funktionendarstellung.

Im weiteren existiert auch kein Normalenvektor, sondern nur eine ganze Ebene die senkrecht zur Geraden steht.

Von einer Geraden seien 2 Punkte gegeben. Z.B. P(1/3/-2) und Q(6/1/-1).

Fakt 1: Die Subtraktion der 2 Ortsvektoren ergeben einen Richtungsvektor der Geraden:

$$\underline{\underline{\overrightarrow{PQ}}} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 1-3 \\ -1-(-2) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Fakt 2: Man kann jeden beliebigen Punkt X auf der Geraden beschreiben mit $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$.

Folgerung: Die Parametergleichung der Geraden: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$.

Im Beispiel resultier die Gleichung: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Es gibt natürlich unendlich viele versch. Parametergleichungen, denn jeder Punkt der Geraden kann Ausgangspunkt sein. Zudem gibt es unendlich viele mögliche Richtungsvektoren. Sie unterscheiden sich aber nur in der Länge und Orientierung, nicht aber in der Richtung.

5.8.1. Schnittpunkt von 2 Geraden

Beispiel 1: Zwei sich schneidende Geraden

Gegeben seien die zwei Geraden: $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Die Parametergleichungen detaillierter aufgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ resp. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Daraus folgen die 3 Gleichungen:

I) $1 + 5t = 1 - 5s$
II) $3 - 2t = 2 + 3s$
III) $-2 + t = 3 - 6s$

Wir bestimmen aus den Gleichungen II) & III) die Unbekannten t und s.
Mit 2 * III) + II) ergibt das -1 = 8 – 9s und somit s = 1. Durch Einsetzen in II) erhalten wir t = -1.

Ist die Gleichung I) ebenfalls gültig für s = 1 und t = -1, so können wir durch Einsetzen den Schnittpunkt bestimmen. Gleichung I) ist gültig für s = 1 und t = -1. Der Schnittpunkt wird durch Einsetzten von t = -1 resp. s = 1 in die entsprechende Parametergleichung bestimmt.

Resultat: S(-4/5/-3)

Beispiel 2: Zwei identische Geraden

Gegeben seien die zwei Geraden: $\overrightarrow{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{r_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Daraus folgen die 3 Gleichungen:

I) 1 + 5t = 6 - 5s
II) 3 - 2t = 1 + 2s
III) -2 + t = -1 – 1s

Wir bestimmen aus den Gleichungen II) & III) die Unbekannten t und s. Mit 2 * III) + II) fallen beide Variablen weg und es bleibt die allgemeingültige Aussage -1 = -1.

Beispiel 3: Zwei sich nicht schneidende (= windschiefe) Geraden (eigentlich der Normalfall)

Gegeben seien die zwei Geraden: $\overrightarrow{r_1} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{r_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -27 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Daraus folgen die 3 Gleichungen:

I) 16 + 6t = 2 + s
II) 2 - 2t = 4 + 2s
III) 5 - 5t = -27 – 2s

Wir bestimmen aus den Gleichungen II) & III) die Unbekannten t und s. Mit III) + II) lautet es:
7 – 7t = -23. Daraus kann man t bestimmen und durch Einsetzten s.
Wenn beide Werte in die Gleichung I) eingesetzt werden, sieht man, dass diese nicht gültig ist.
Somit sind diese 2 Geraden windschief, d.h. sie haben keinen Schnittpunkt.

5.8.2. Kürzester Abstand von 2 windschiefen Geraden

Seien die 2 windschiefen Geraden gegeben durch:

$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_{01}} + t \cdot \vec{a}$ und $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{r_{02}} + s \cdot \vec{b}$ dann wird der kürzeste Abstand d berechnet mit der Formel:

$$d = \frac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, (\overrightarrow{r_{01}} - \overrightarrow{r_{02}})\right]\right|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{\left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\overrightarrow{r_{01}} - \overrightarrow{r_{02}})\right|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

Fortsetzung Beispiel 3:

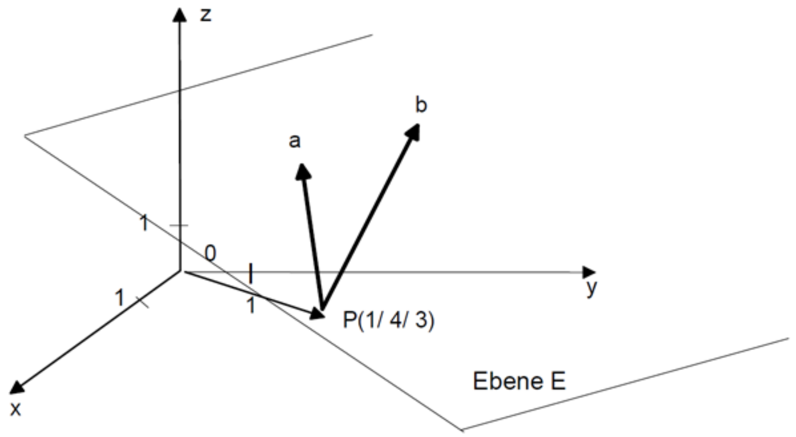
$$\overrightarrow{r_{01}} - \overrightarrow{r_{02}} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{14^2 + 7^2 + 14^2} = \sqrt{441} = 21$$

$$\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, (\overrightarrow{r_{01}} - \overrightarrow{r_{02}})\right]\right| = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\overrightarrow{r_{01}} - \overrightarrow{r_{02}})\right| = \left|\begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 32 \end{pmatrix}\right| = |14 \cdot 14 + 7 \cdot (-2) + 14 \cdot 32|$$
$$= |630| = 630$$

Somit beträgt der kürzeste Abstand $d = \frac{\left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\overrightarrow{r_{01}} - \overrightarrow{r_{02}})\right|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{630}{21} = 30\ \mathrm{LE}$

5.9. Ebenengleichung in R^3

Ebenengleichung im Raum	
	Man kann jeden beliebigen Punkt X der Ebene beschreiben mit: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$ Eine Parametergleichung der Ebene lautet: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$

Beispiel: Gegeben sind die 3 Punkte A(1/4/3), B(3/1/-4) und C(3/7/8), gesucht eine Parametergleichung der Ebene $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$.

Der Punkt A soll die Rolle von P übernehmen (natürlich könnte man auch den Punkt B oder C nehmen).

Somit lautet der Ortsvektor $\overrightarrow{r_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Wir müssen noch 2 (linear unabhängige) Vektoren bilden. Wenn die 3 Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen kann ich damit 2 beliebige Vektoren bilden.

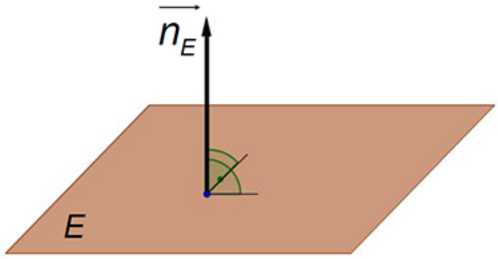
z.B. $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

und somit lautet eine Parametergleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Diese Parametergleichung ist selbstverständlich nicht eindeutig!

5.9.1. Der Normalenvektor und Koordinatengleichung der Ebene

Normalenvektor und Koordinatengleichung in der Ebene



Ein Vektor, der senkrecht zur Ebene E steht, nennt man Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ zur Ebene E.

Ist E: Ax + By + Cz + D = 0, dann ist

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor zur Ebene E.

Spannen die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Ebene Ax + By + Cz + D = 0 auf, dann gilt:

$\lambda = (\vec{a} \times \vec{b}) = \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

Beweis mittels Skalarprodukt

Der Normalenvektor steht senkrecht auf jede Richtung innerhalb der Ebene. Damit muss gezeigt werden, dass das Skalarprodukt von $\overrightarrow{n_E}$ mit zwei verschiedenen (also linear unabhängigen) Richtungen gleich Null ist.

Die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen lauten:
SP mit x-Achse: $S_1 = (-\frac{D}{A}/0/0)$, da für die x-Achse gilt: y = z = 0
SP mit y-Achse: $S_2 = (0/-\frac{D}{B}/0)$, da für die y-Achse gilt: x = z = 0
SP mit z-Achse: $S_3 = (0/0/-\frac{D}{C})$, da für die z-Achse gilt: x = y = 0

Nun kann man zwei (linear unabhängige) Vektoren bilden:
z.B. $\overrightarrow{S_1S_2} = \begin{pmatrix} D/A \\ -D/B \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} D/A \\ 0 \\ -D/C \end{pmatrix}$

Für die Skalarprodukte gilt nun:
$\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{S_1S_2} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D/A \\ -D/B \\ 0 \end{pmatrix} = D - D = 0$ und $\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D/A \\ 0 \\ -D/C \end{pmatrix} = D - D = 0$ qed.

Fortsetzung Beispiel:

Gegeben sind die 3 Punkte A(1/4/3), B(3/1/-4) und C(3/7/8), gesucht die Koordinatengleichung der Ebene: $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$.

Von vorhin kennen wir: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

und wir wissen: $\lambda = (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix} = \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

Wir dürfen vereinfachen: $\begin{pmatrix} 6 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

und somit: $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 1 \cdot x + (-4) \cdot y + 2 \cdot z + D = 0$

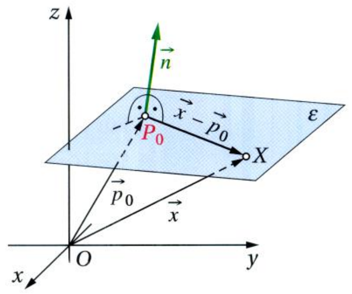
Nun fehlt noch der Wert für D. Diesen erhalten wir, indem wir einen beliebigen Punkt in die „halbfertige“ Koordinatengleichung einsetzen.

Wir setzen den Punkt A(1/4/3) ein und erhalten: $1 \cdot 1 + (-4) \cdot 4 + 2 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = 9$

Und somit haben wir die Koordinatengleichung E: $x - 4 \cdot y + 2 \cdot z + 9 = 0$.

5.9.2. Die Hesse'sche Normalenform und der Abstand eines Punktes zur Ebene

Hesse'sche Normalenform und Abstand eines Punktes zur Ebene



Die Gleichung

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

heisst Hesse'sche Normalenform der Ebene.

- Ergibt das Einsetzten eines Punktes in der HN = 0, so liegt der Punkt in der Ebene.
- Ergibt das Einsetzten eines Punktes in der HN d > 0, so liegt der Punkt auf der gleichen Seite des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ mit Abstand d zur Ebene.
- Ergibt das Einsetzten eines Punktes in der HN d < 0, so liegt der Punkt auf der entgegengesetzten Seite des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ mit Abstand |d| zur Ebene.

Fortsetzung Beispiel:
Gegeben ist die Koordinatengleichung der Ebene E: $x - 4 \cdot y + 2 \cdot z + 9 = 0$.
Gesucht der Abstand der Punkte Q(3/-1/-4), R(5/6/-7) und S(3/7/8) zur Ebene.

1. Schritt: Bestimmen der HN der Ebene:

$$\text{HN: } \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{x - 4 \cdot y + 2 \cdot z + 9}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{x - 4 \cdot y + 2 \cdot z + 9}{\sqrt{21}} = 0$$

2. Schritt: Einsetzten der Punkte:
Q(3/-1/-4):

$$\frac{x - 4 \cdot y + 2 \cdot z + 9}{\sqrt{21}} = \frac{3 - 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) + 9}{\sqrt{21}} = \frac{8}{\sqrt{21}} = 1.746$$

Der Punkt liegt also dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ gleich gesetzten Seite der Ebene mit dem Abstand 1.746 LE zur Ebene.

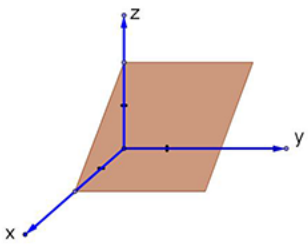
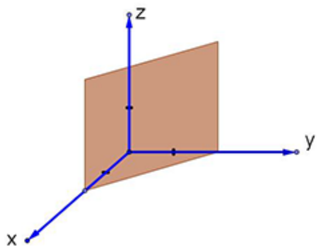
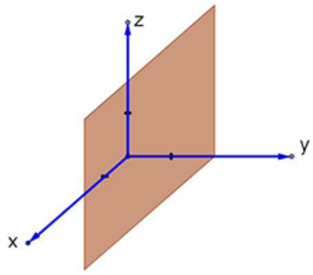
R(5/6/-7): $\frac{5-4\cdot 6+2\cdot(-7)+9}{\sqrt{21}} = \frac{-24}{\sqrt{21}} = -5.237$
Der Punkt liegt also dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ entgegengesetzte Seite der Ebene mit dem Abstand 5.237 LE zur Ebene.

S(3/7/8): $\frac{3-4\cdot 7+2\cdot 8+9}{\sqrt{21}} = \frac{0}{\sqrt{21}} = 0$
Der Punkt liegt auf der Ebene (es ist ja auch unser ursprünglicher Punkt C.)

5.9.3. Spezielle Ebenen

Ebenen können bezüglich des Koordinatensystems eine spezielle Lage einnehmen.

Die Ebenengleichung und die Spurgleichung (Gleichung der Schnittgerade der Ebene mit den Koordinatenebenen) lauten:

	E ist parallel zur y-Achse	**E ist parallel zur z-Achse**	**E ist parallel zur xz-Ebene**
			
Ebenengl.	Ax + Cz + D = 0	Ax + By + D = 0	By + D = 0 resp. y = konst.
Spur xy-E	x = konst.	y = mx + q	y = konst.
Spur yz-E	z = konst.	y = konst.	y = konst.
Spur xz-E	z = mx + q	x = konst.	keine

	E ist parallel zur x-Achse	**E ist parallel zur xy-Ebene**	**E ist parallel zur yz-Ebene**
Ebenengl.	By + Cz + D = 0	Cz + D = 0 resp. z = konst.	Ax + D = 0 resp. x = konst.
Spur xy-E	x = konst.	keine	x = konst.
Spur yz-E	z = my + q	z = konst.	Keine
Spur xz-E	z = konst.	z = konst.	x = konst.

Die Parallelität zu einer Koordinatenachse bedeutet, dass bezüglich dieser Achse keine Auslenkung vorliegt.
Deshalb ist der Koeffizient vor diesem Achsenparameter gleich Null; der Summand fällt also weg!

5.10. Grundaufgaben Geraden sowie Ebenen in R^3

Aufgabe 1:	Geg.: 3 Punkte	Ges.: Parametergleichung
Aufgabe 2:	Geg.: Parametergleichung	Ges.: Schnittpunkte mit Koordinatenachse
Aufgabe 3:	Geg.: 2 Punkte	Ges.: Liegen die Punkte in der Ebene
Aufgabe 4*:	Geg.: Koordinaten- / Parametergleichung	Ges.: Normalenvektor
Aufgabe 5:	Geg.: 3 Punkte	Ges.: Koordinatengleichung
Aufgabe 6:	Geg.: Koordinatengleichung	Ges.: Schnittpunkte mit den Achsen
Aufgabe 7*:	Geg.: Koordinatengleichung	Ges.: Parametergleichung
Aufgabe 8:	Geg.: Parametergleichung, 1 Punkt	Ges.: Koordinatengleichung + Punkt enthält
Aufgabe 9*:	Geg.: Koordinatengleichung	Ges.: Hesse'sche Normalenform
Aufgabe 10:	Geg.: Koordinatengleichung, 2 Punkte	Ges.: Liegen die Punkte in der Ebene, Abstand
Aufgabe 11*:	Geg.: Koordinatengleichung, 1 Punkt	Ges.: Fusspunkt des Lotes
Aufgabe 12*:	Geg.: Gleichung, 1 Gerade	Ges.: Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden
Aufgabe 13:	Geg.: 2 Koordinatengleichungen	Ges.: Schnittgerade der beiden Ebenen
Aufgabe 14:	Geg.: 2 Parametergleichungen	Ges.: Schnittgerade der beiden Ebenen

* = mehrere Versionen der Aufgabenstellung

Aufgabe 1:

Gegeben: 3 Punkte A(3/0/6), B(6/-6/-4) und C(-2/-4/4)
Gesucht: Parametergleichung der Ebene

Lösung:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_A} + u \cdot \overrightarrow{AB} + v \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 6-3 \\ -6-0 \\ -4-6 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2-3 \\ -4-0 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Resultat:

Die Parametergleichung lautet: $\underline{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:

Gegeben: Parametergleichung der Ebene, siehe Aufgabe 1
Gesucht: Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Lösung:

Schnittpunkt mit x-Achse: d.h. y = z = 0
Die 3 Grundgleichungen:

I) x = 3 + 3u – 5v
II) y = 0 – 6u – 4v
III) z = 6 – 10u – 2v

Aus y = z = 0 folgen die 2 Gleichungen:

II) 0 – 6u – 4v = 0
III) 6 – 10u – 2v = 0

Daraus folgt u = 6/7 und v = -9/7, eingesetzt in I) ergibt das:
I) x = 3 + 3u – 5v = 3 + 3 · (6/7) – 5 · (-9/7) = 12

Resultat:

Somit lautet der Schnittpunkt mit der x-Achse P(12/0/0).

Analog für die Schnittpunkte Q(0/-6/0) mit der y-Achse und R(0/0/8) mit der z-Achse.

Aufgabe 3:
Gegeben: Die Punkte P(-10/-2/12) und Q(11/-2/3)
Gesucht: Liegen die Punkte in der Ebene von Aufgabe 1?

Lösung:
Für den Punkt P lauten die 3 Gleichungen:

I) -10 = 3 + 3u – 5v
II) -2 = 0 – 6u – 4v
III) 12 = 6 – 10u – 2v

Aus zwei Gleichungen u und v bestimmen und kontrollieren, ob die 3. Gleichung damit auch erfüllt ist. Für P ist die 3. Gleichung auch erfüllt, für Q nicht.

Resultat:
Punkt P liegt in der Ebene, Punkt Q nicht.

Aufgabe 4: Koordinatengleichung
Gegeben: Die Koordinatengleichung der Ebene
Gesucht: Ein Normalenvektor der Ebene

Lösung:

E: 2x – 4y + 3z – 24 = 0 Daraus folgt, dass $\overrightarrow{\mathrm{n_E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor ist, oder allgemein:

E: Ax + By + Cz + D = 0 Daraus folgt, dass $\overrightarrow{\mathrm{n_E}} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor ist.

Aufgabe 4b: Parametergleichung

Gegeben: Die Parametergleichung der Ebene $\vec{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{u} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathrm{v} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

Gesucht: Ein Normalenvektor der Ebene

Lösung:

Vektorprodukt der zwei Richtungsvektoren: $\overrightarrow{\mathrm{n_E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 30 \\ 17 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4c: Bezug zur Aufgabe 1

Gegeben: Die Parametergleichung der Ebene $\vec{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathrm{u} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} + \mathrm{v} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gesucht: Ein Normalenvektor der Ebene

Lösung:

Vektorprodukt der zwei Richtungsvektoren: $\overrightarrow{\mathrm{n_E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 56 \\ -42 \end{pmatrix} = (-14) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5:
Gegeben: 3 Punkte A(3/0/6), B(6/-6/-4) und C(-2/-4/4)
Gesucht: Die Koordinatengleichung der Ebene

Lösungsmethode 1:
Es ist zuerst die Parametergleichung zu erstellen (vgl. Aufgabe 1), dann daraus die Koordinatengleichung erstellen.

Aus je zwei Gleichungen ist v zu eliminieren, dann aus den 2 „neuen" Gleichungen ist u zu eliminieren.
Die 3 Grundgleichungen:

I) $x = 3 + 3u - 5v$
II) $y = 0 - 6u - 4v$
III) $z = 6 - 10u - 2v$

Aus II) und III) sowie aus I) und III) wird je v eliminiert:

Ia) $y - 2z = -12 + 14u$
IIa) $2x - 5z = -24 + 56u$

Nun wird aus diesen beiden Gleichungen u eliminiert, es folgt die Gleichung: $2x - 4y + 3z - 24 = 0$

Lösungsmethode 2:
Wir können wiederum die Aufgabe 4a & 4c zu Hilfe nehmen.
Der Normalenvektor haben wir ja bereits berechnet: $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 56 \\ -42 \end{pmatrix}$
Mit Aufgabe 4a wissen wir, dass die Koordinatengleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ nun wie folgt lautet: $(-28)x + 56y + (-42)z + D = 0$.

Um das D zu bestimmen müssen wir einer der 3 Punkte einsetzen. Nehmen wir den Punkt A(3/0/6), dann lautet es: $(-28) \cdot 3 + 56 \cdot 0 + (-42) \cdot 6 + D = 0$ und auf D aufgelöst ergibt es $D = 336$.

Somit lautet eine Koordinatengleichung: $-28x + 56y - 42z + 336 = 0$
Dividieren wir noch mit (-14), dann erhalten wir: $2x - 4y + 3z - 24 = 0$

Resultat:
Die Koordinatengleichung lautet: $2x - 4y + 3z - 24 = 0$

Aufgabe 6:
Gegeben: Die Koordinatengleichung der Ebene E: $2x - 4y + 3z - 24 = 0$
Gesucht: Die Schnittpunkte mit den Achsen

Lösung:
Für den Schnittpunkt mit der x-Achse ist $y = z = 0$.
Dies in der Koordinatengleichung eingesetzt ergibt: $2x - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 24 = 0$ resp. $2x - 24 = 0$
Also $x = 12$ und somit den Schnittpunkt P(12/0/0).

Dito mit den anderen 2 Schnittpunkte.

Resultat:
Der Schnittpunkt mit der x-Achse lautet P(12/0/0), Q(0/-6/0) mit der y-Achse und R(0/0/8) mit der z-Achse.

Aufgabe 7:

Gegeben: Die Koordinatengleichung der Ebene: E: x – 5y + z + 9 = 0

Gesucht: Eine Parametergleichung der Ebene

Lösung:

Wie lösen die Ebenengleichung nach z auf: z = -x + 5y – 9.

In dieser Gleichung können zwei Variablen „frei“ gewählt werden. Wir wählen x = u und y = v. Durch das Einsetzen von x = u und y = v folgt dann: z = -u + 5v – 9. Somit haben wir die 3 Gleichungen:

I)	x = u			I)	x = 0 + 1 · u + 0 · v
II)	y = v		resp.	II)	y = 0 + 0 · u + 1 · v
III)	z = -9 – u + 5v			III)	z = -9 – u + 5v

Daraus kann nun direkt eine Parametergleichung geschrieben werden.

Resultat:

Die Parametergleichung lautet: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7b:

Gegeben: Die Koordinatengleichung der Ebene: E: 2x – 4y + 3z - 24 = 0

Gesucht: Eine Parametergleichung der Ebene

Wir verifizieren, dass die erhaltene Parametergleichung zu der aus der Aufgabe 1 passt.

Lösung:

Wie lösen die Ebenengleichung nach z auf: z = -2/3x + 4/3y + 8.

In dieser Gleichung können zwei Variablen „frei“ gewählt werden. Wir wählen x = u und y = v. Durch das Einsetzen von x = u und y = v folgt dann: z = -2/3u + 4/3v + 8. Somit haben wir die 3 Gleichungen:

I)	x = u			I)	x = 0 + 1 · u + 0 · v
II)	y = v		resp.	II)	y = 0 + 0 · u + 1 · v
III)	z = 8 + -2/3u + 4/3v			III)	z = 8 + -2/3u + 4/3v

Daraus kann nun direkt eine Parametergleichung geschrieben werden:

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2/3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$ resp. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Wir wissen (aus Aufgabe 1): $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 56 \\ -42 \end{pmatrix} = (-14) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

für die Parametergleichung gilt: $\overrightarrow{n_{neu}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Da die Punkte (0/0/8) und (3/0/6) (aus Aufgabe 1) je die Gleichung 2x – 4y + 3z – 24 = 0 erfüllen, haben wir mit der Parameterdarstellung in Aufgabe 1 und derjenigen hier die gleiche Ebene E: 2x – 4y + 3z – 24 = 0 beschrieben.

Resultat:

Die Parametergleichung lautet: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8:

Gegeben: Die Parametergleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ einer Geraden und ein Punkt P(-4/0/8), der ausserhalb der Geraden liegt.

Gesucht: Eine Koordinatengleichung der Ebene, die die Gerade und den Punkt enthält.

Lösung:

Es muss ein zweiter Richtungsvektor erzeugt werden.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 4-(-4) \\ 1-0 \\ 2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir eine Parametergleichung der Ebene. Mit der 2. Lösungsmethode der Aufgabe 5 erhalten wir dann eine Koordinatengleichung der Ebene.

Resultat:

Eine Koordinatengleichung der Ebene E lautet: $3x + 6y + 5z - 28 = 0$

Aufgabe 9:

Gegeben: Die Koordinatengleichung der Ebene E: $2x - 4y + 3z - 24 = 0$

Gesucht: Die Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung

Lösung:

E: $2x - 4y + 3z - 24 = 0$ In die HN eingesetzt:

$$\text{HN: } \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{2 \cdot x - 4 \cdot y + 3 \cdot z - 24}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{2x - 4y + 3z - 24}{\sqrt{29}} = 0$$

Resultat:

Die Hesse'sche Normalenform der Ebene E $2x - 4y + 3z - 24 = 0$ ist: $\frac{2x-4y+3z-24}{\sqrt{29}} = 0$

Aufgabe 9b:

Gegeben: Die Koordinatengleichung der Ebene E: $Ax + By + Cz + D = 0$

Gesucht: Die allgemeine Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung

Lösung:

$$\text{HN: } \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Resultat:

Die allgemeine Hesse'sche Normalenform der Ebene ist: $\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$

Aufgabe 10:

Gegeben: Eine Koordinatengleichung der Ebene E: 2x – 4y + 3z – 24 = 0 und die Punkte P(-10/-2/12) und Q(11/-2/3).

Gesucht: Liegen die Punkte in der Ebene? Wenn nicht, wie gross ist der Abstand zur Ebene?

Lösung:

HN bilden:

$$\frac{2 \cdot x - 4 \cdot y + 3 \cdot z - 24}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{2x - 4y + 3z - 24}{\sqrt{29}} = 0$$

Der Punkt P(-10/-2/12) in HN eingesetzt:

$$\frac{2 \cdot (-10) - 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 12 - 24}{\sqrt{29}} = \frac{-20 + 8 + 36 - 24}{\sqrt{29}} = \frac{0}{\sqrt{29}} = 0$$

Der Punkt P liegt somit in der Ebene.

Der Punkt Q(11/-2/3) in HN eingesetzt:

$$\frac{2 \cdot (-11) - 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 - 24}{\sqrt{29}} = \frac{22 + 8 + 9 - 24}{\sqrt{29}} = \frac{15}{\sqrt{29}} = 2.785$$

Somit liegt Q nicht in der Ebene, der Abstand beträgt 2,785 LE. Der Punkt P liegt auf der „gleichen“ Seite wie der Normalenvektor.

Bemerkung: Wäre das Resultat negativ, so würde der Punkt auf der anderen Seite als der Normalenvektor zeigt, liegen, der Abstand müsste dann mit dem Betrag versehen werden.

Resultat:

Der Punkt P liegt in der Ebene, der Punkt Q nicht, er hat einen Abstand von 2,785 LE.

Aufgabe 11:

Gegeben: Die Koordinatengleichung der Ebene E: x – 2z + 3 = 0 und der Punkt P(4/1/1)

Gesucht: Fusspunkt des Lotes

Lösung:

Das Lot liegt auf der Geraden, die mit der Parametergleichung $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{n_E}$ beschrieben werden kann, also $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Es ist nun der Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden zu bestimmen. Die Geradengleichung führt zu den 3 Gleichungen:

I) x = 4 + t

II) y = 1

III) z = 1 – 2t

Dies kann in der Ebenengleichung x – 2z + 3 = 0 eingesetzt werden: 4 + t – 2(1-2t) + 3 = 0

Die Gleichung zusammengefasst und auf t aufgelöst ergibt: t = -1

t = -1 in die Geradengleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ eingesetzt ergibt den Punkt Q(3/1/3).

Resultat:

Der Fusspunkt des Lotest ist Q(3/1/3).

Aufgabe 11b:
Verifizieren Sie, dass der Fusspunkt wirklich in der Ebene liegt, und berechnen Sie die Länge des Lotes auf 2 Arten.

Lösung:
HN: $\frac{x-2\cdot z+3}{\sqrt{1^2+0+(-2)^2}}=0$

a)
Der Punkt P(3/1/3) in HN eingesetzt: $\frac{3-2\cdot 3+3}{\sqrt{1^2+0+(-2)^2}}=\frac{0}{\sqrt{5}}=0$

b)
Variante 1:
Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}=\left|\begin{pmatrix}3-4\\1-1\\3-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-1)^2+0+2^2}=\sqrt{5}$

Variante 2: (vgl. Aufgabe 10)
Der Punkt P(4/1/1) in HN eingesetzt: $\frac{4-2\cdot 1+3}{\sqrt{1^2+0+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

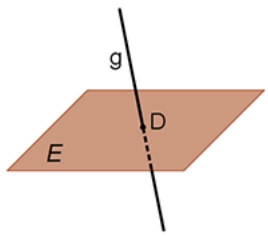
Aufgabe 12:

Gegeben: Die Gleichung der Ebene E: 2x – 2y – z + 17 = 0 und die Gerade $\vec{r}=\begin{pmatrix}7\\6\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

Gesucht: Der Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden

Lösung:
(vgl Aufgabe 11)
Die Geradengleichung führt zu den 3 Gleichungen:

I) x = 7 + 2t
II) y = 6 – t
III) z = 3 – 2t



Dies kann in der Ebenengleichung eingesetzt werden:
2(7 + 2t) – 2(6 – t) – (3 – 2t) + 17 = 0
Die Gleichungen zusammengefasst: 8t + 16 = 0 und auf t aufgelöst: t = -2
t = -2 in die Geradengleichung eingesetzt ergibt den Punkt D(3/8/7).

Resultat:
Der Schnittpunkt lautet D(3/8/7).

⇒ siehe auch Aufgabe 12b, nächste Seite

Aufgabe 12b:

Gegeben: Die Gl. der Ebene $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ & Gerade $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gesucht: Der Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden

Lösung:

(vgl Aufgabe 11)

Die Parametergleichung führt zu den 3 Gleichungen:

I) -1 + u + v = 7 + 2t

II) 3 – u + 2v = 6 – t

III) 9 + 4u – 2v = 3 – 2t

Dies ist ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten. Dies kann gelöst werden und im Normallfall genau einen Punkt als Lösung.

In diesem Fall u = 1, v = 3 und t = -2. In die Ebenen- und Geradengleichung eingesetzt ergibt den Punkt D(3/8/7).

Bemerkung:

Wir müssen in diesem Fall keine Annahmen treffen. Sollte ein entarteter Fall auftreten, so manifestiert sich das im Gleichungssystem sofort, das entweder nicht lösbar ist, oder unendlich viele Lösungen liefern.

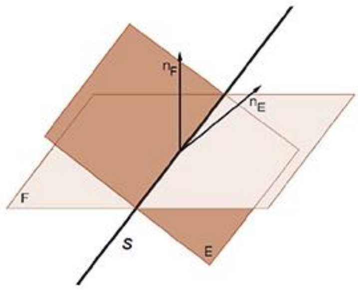
Aufgabe 13:

Gegeben: Die Koordinatengleichung der Ebene E: 2x – 3y – z + 2 = 0 und F: x – 2y + 2z + 1 = 0

Gesucht: Die Schnittgerade der beiden Ebenen.

Lösungsmethode 1:

Annahme, beide Ebenen haben keine spezielle Lage (also nicht parallel oder senkrecht zu einer der 3 Achsen). Somit können wir für eine Variable einen bestimmten Wert einsetzten, z.B. x = 1. Durch Einsetzten dieses Wertes gibt es 2 neue Gleichungen.



I) 2 – 3y – z + 2 = 0 resp. -3y – z + 4 = 0

II) 1 – 2y + 2z + 1 = 0 resp. -2y + 2z + 2 = 0

Dieses Gleichungssystem kann nun gelöst werden (Additionsmethode), und es folgt y = 1.25 und z = 0.25 und somit liegt der Punkt P(1/1,25/0,25) auf der Schnittgeraden.

Wir wiederholen das Verfahren für z = 0, und wir erhalten y = 0 und x = -1 und somit liegt der Punkt Q(-1/0/0) auf der Schnittgeraden.

Wir haben nun 2 Punkte der Schnittgeraden und können einen Parametergleichung der Geraden bestimmen z.B.

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$ resp. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungsmethode 2:

Annahme, beide Ebenen haben keine spezielle Lage (also nicht parallel oder senkrecht zu einer der 3 Achsen). Somit können wir für eine Variable den Parameter t setzten und im neuen Gleichungssystem die zwei anderen Variablen eliminieren z.B. z = t. Durch Einsetzten dieses Wertes gibt es 2 neue Gleichungen:

I) $x - 2y + 2t + 1 = 0$
II) $2x - 3y - t + 2 = 0$

Mit der Additionsmethode kann man auf x und y auflösen. Wir erhalten x = 8t + 1 resp. y = 5t und somit ein neues Gleichungssystem:

I) $x = -1 + 8t$
II) $y = 0 + 5t$
III) $z = t$

Daraus kann direkt eine Parametergleichung der Geraden extrahiert werden: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schlussbemerkung:

Die aus den zwei Lösungsvarianten erhaltenen Geraden sind wegen dem Richtungsvektor sicher parallel. Um sicher zu sein, ob es auch wirklich die identischen Geraden sind, muss der eine Ortsvektor mit der anderen Parametergleichung erhalten werden können.

In diesem Fall ist das so, denn z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit t = 0,25.

Aufgabe 14:

Gegeben: Die Parametergleichung der Ebenen

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Die Schnittgerade der beiden Ebenen

Lösung:

Die Parametergleichungen kann man in die Gleichungssysteme umformen.

Die Parametergleichungen führen zu den 3 Gleichungen:

I) $-1 + u + v = 4 + r - 8t$
II) $3 - u + 2v = 1 + 2r + t$
III) $9 + 4u - v = 2 - 3r - 6t$

Dieses Gleichungssystem ist unterbestimmt (3 Gleichungen und 4 Unbekannte). Somit ist im Normalfall die Lösungsmenge ein 1-dim. Raum, oder eben eine Gerade. Man kann nun die 3 Variablen u, v, und r je als Funktion von t schreiben. Danach muss man diese erhaltenen „Lösungen“ in I) – III) einsetzten.
Das ergibt dann die Komponenten der Parameterdarstellung der Geraden.

6. Änderungen

6.1. Änderungen der Version 2011-06-25 zur Version 2011-11-11

S. 41 Die äussere Klammer bei der allg. Sinusfunktion wurde am falschen Ort geschlossen.

S. 49 Fehler in der Formel sin(alpha) – sin(Beta), und zwar ist im sinus drin auch ein „-“ und nicht ein „+“

S. 51 In den Reduktionsformeln konsequent mit x gearbeitet. In der Tabelle Punkt 1 bereinigt. Im Musterbeispiel 1 kleinere Fehler resp. Ungenauigkeiten behoben. In Beispiel 2 „+/- Wurzel(0,1444).