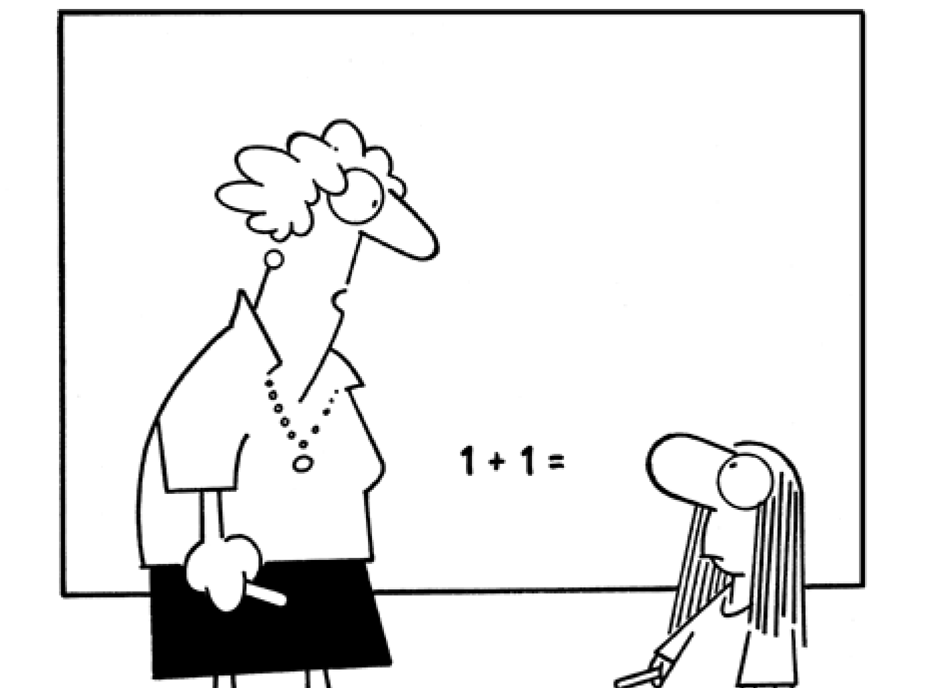
Mathematik

Algebra

Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Engineering & Architecture



"Yes, this will be useful to you later in life."

Diese Zusammenfassung basiert mehrheitlich auf den Skripts von Josef Schuler, ZLS HSLU T&A.

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen 4
   1.1. Mathematische Zeichen 4
   1.2. Zahlen 5
   1.3. Der Betrag 5
   1.4. Grundgesetze für das Rechnen mit reellen Zahlen 6
   1.5. Primzahlen, Primzahldarstellung 6
   1.6. ggT und kgV 7
   1.7. Prozentrechnen 7
   1.8. Zinsrechnen 8
   1.9. Degressive Abschreibung 8
   1.10. Aussagenlogik (Term, Aussage, Aussageform, NICHT, UND, ODER-Verknüpfungen) 9
   1.11. Das Summenzeichen 10
   1.12. Das Produktzeichen 10
   1.13. Die Fakultät 10
   1.14. Binomische Formel 11
   1.15. Binomischer Lehrsatz (Pascalsche Dreieck) 11
   1.16. Dezimalvorsätze 11
2. Höhere Rechenoperationen 12
   2.1. Potenzrechnen 12
   2.2. Die Exponentialform von Zahlen 12
   2.3. Wurzelrechnen 13
   2.4. n-te Wurzel berechnen 14
   2.5. Logarithmen & Logarithmengesetze 15
   2.6. Verschiedene Aufgaben 16
3. Mengenlehre 18
   3.1. Mathematische Zeichen 18
   3.2. Darstellung von Mengen 18
   3.3. Anzahl Elemente 19
   3.4. Teilmenge 19
   3.5. Vereinigungsmenge 20
   3.6. Durchschnittsmenge 20
   3.7. Differenzmenge 20
   3.8. Komplementärmenge 21
   3.9. Produktmenge 21
   3.10. Weitere Gesetze 21
4. Gleichungen 22
   4.1. Gleichungstyp 22
   4.2. Rechenregeln 22
   4.3. Ungleichungen mit „Null“ auf der rechten Seite 23
   4.4. Gleichungen mit Formvariablen 23
   4.5. Schwierige Ungleichungen 24
   4.6. Ungleichungen mit 2 verschiedene Faktoren im Nenner 25
   4.7. Einfache Gleichungen mit Betragszeichen 25
   4.8. Lineare Gleichungssysteme 26
   4.9. Gleichung mit mehreren Unbekannten (Additionsmethode) 27
   4.10. Die wichtigsten Spezialfälle 27
   4.11. Nichtlineare Gleichungssysteme (Substitutionsmethode) 28
   4.12. Quadratische Gleichungen 29

4.13. Quadratische Gleichungen mit Formvariablen ... 30
4.14. Quadratische Gleichungen mit Wurzelziehen ... 30
4.15. Quadratische Gleichungen mit Substitution ... 31
4.16. Biquadratische Gleichungen ... 31
4.17. Wurzelgleichungen ... 32
4.18. Potenzgleichungen ... 34
4.19. Exponentialgleichungen ... 36
4.20. Logarithmusgleichungen ... 37
4.21. Verschiedene Aufgaben ... 39

5. Funktionen ... 41
5.1. Das Koordinatensystem ... 41
5.2. Darstellungsarten ... 42
5.3. Wichtige Begriffe ... 42

6. Lineare Funktion ... 42
6.1. Zusammenfassung der Eigenschaften der linearen Funktion y = f(x) = ax + b ... 42
6.2. Berechnung der Schnittpunkten mit den Achsen ... 43
6.3. Der Begriff der Steigung ... 43
6.4. Zwei-Punkte-Form ... 44
6.5. Punkt-Steigungs-Form ... 45
6.6. Schnittpunkt zweier Geraden ... 45
6.7. Die Steigung zweier parallelen Geraden ... 45
6.8. Die Steigung zweier senkrecht stehender Geraden ... 45
6.9. Umkehrfunktion der linearen Funktion ... 46
6.10. Stückweise lineare Funktionen ... 46

7. Die Hyperbel ... 47
7.1. Normalhyperbel und deren Verschiebung ... 47
7.2. Gegenüberstellung der linearen Funktion und Hyperbel ... 48

8. Die Quadratische Funktion ... 49
8.1. Der Graph von $y = f(x) = ax^2$ ... 49
8.2. Der Graph von $y = f(x) = ax^2 + c$ ... 50
8.3. Der Graph von $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ... 51
8.4. Zusammenfassung ... 52
8.5. Verschiedene Aufgaben ... 54

9. Die Wurzelfunktion ... 59
9.1. Definition der Wurzelfunktion $y = f(x) = \sqrt{(x)}$ ... 59
9.2. Der Graph von $y = f(x) = \sqrt{(x)} + d$ ... 59
9.3. Der Graph von $y = f(x) = \sqrt{(x + c)}$ ... 60
9.4. Der Graph von $y = f(x) = \sqrt{(x + c)} + d$ ... 60
9.5. Verschiedene Aufgaben ... 61

10. Die Exponentialfunktion ... 63
10.1. Definition und Eigenschaften von $f(x) = a^x$ ... 63
10.2. Schieben und Strecken von Exponentialfunktionen ... 64
10.3. Definition und Eigenschaften von $f(x) = b \cdot a^x$ ... 65
10.4. Definition und Eigenschaften von $f(x) = b \cdot a^x + v$ ... 65
10.5. Umformung einer Zahl in einen e-Zahl ... 66
10.6. Umformung der allg. Exponentialfunktion in die e-Funktion ... 66
10.7. Exponentielle(s) Wachstum, resp. Abnahme (Verdoppelungs- / Halbwertszeit) ... 66
10.8. Exponentielle Prozesse (Wachstums-, Abkling-, Sättigungsfunktion) ... 67
10.9. Verschiedene Aufgaben ... 68

11. Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$ 72
11.1. $y = f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$, „Parabeln“ 72
11.2. $y = f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{Z}^-$ und $n \leq -1$, „Hyperbel“ 72
11.3. Allgemeine Funktion $y = f(x) = x^p$ 73
12. Zusammengesetzte Potenzfunktionen 74
12.1. Polynom = rationale Funktion 74
12.2. Gebrochen rationale Funktion 75
13. Logarithmusfunktion 79
13.1. Definition und Eigenschaften 79
14. Zusammenstellung einiger Eigenschaften von Funktionen 80
14.1. Nullstellen 80
14.2. Monotonie 80
14.3. Periodizität 80
14.4. Symmetrien 81
14.5. Umkehrbarkeit von Funktionen 82
15. Erweiterung des Funktionsbegriffes 83
15.1. Von einer Funktion zur anderen 83
15.2. Funktionen miteinander addieren oder multiplizieren 83
16. Extremalwertaufgaben mit Nebenbedingungen 84
17. Betriebswirtschaftliche Funktionen & Ökonomische Modelle 89
17.1. Kosten-, Erlös- & Gewinnfunktion 89
17.2. Die Angebots- und Nachfragefunktion 90
17.3. Angebots- & Nachfrageüberhang / Gewinn- & Erlösfunktion - Grafiken 91
17.4. Verschiedene Aufgaben 91
18. Textaufgaben 94
18.1. Mischungsaufgaben 94
18.2. Arbeit / Leistung 98
18.3. Bewegung 102
19. Änderungen 105
19.1. Änderungen der Version 2011-06-25 zur Version 2011-11-11 105

1. Grundlagen

1.1. Mathematische Zeichen

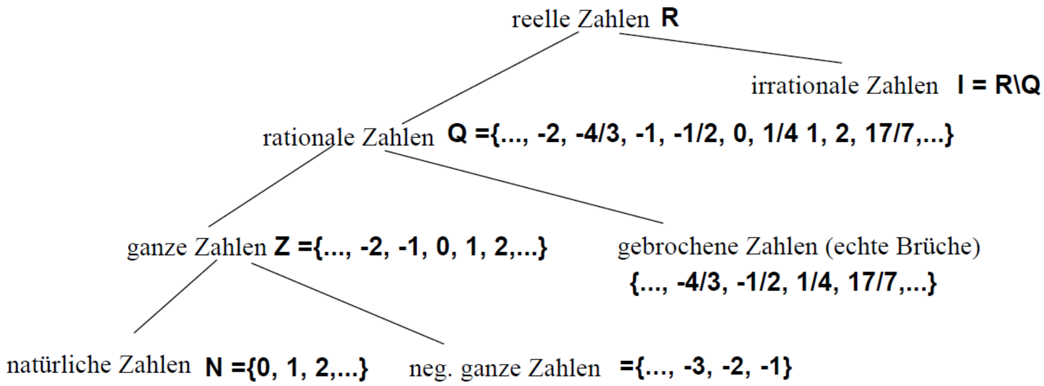
Zeichen	Bedeutung	Beispiel	
$\in$	„Ist Element von …“	$-2 \in \mathbb{Z}$	
$\notin$	„Ist nicht Element von …“	$-2 \notin \mathbb{N}$	
$\exists$	„Es existiert …“	$\exists\ a, b, c \in \mathbb{N}$ so, dass $a^2 + b^2 = c^2$	
$\nexists$	„Es existiert nicht (keine) …“	$\nexists\ a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $\|a + b\| > \|a\| + \|b\|$	
$\forall$	„Für alle …“	$\forall\ a \in \mathbb{R}$ gilt $\|a\| \geq 0$	
$\setminus$	„Ohne …“	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ heisst „die reellen Zahlen ohne die Null“	
$\|$	„Für die gilt“	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ „x aus $\mathbb{R}$, für die gilt $x > 0$“	
$\| \ \|$	Betrag	$\|-4\| = 4$	
$\sum$	Summe		
$\prod$	Produkt		
!	Fakultät		
∞	„unendlich“		
$\vee$	oder, OR	$A \vee B$ (A oder B)	
$\wedge$	und, AND	$A \wedge B$ (A und B)	
$\neg$	nicht, NOT	$\neg A$ (nicht A)	
<	„kleiner“		
>	„grösser“		
$\leq$	„kleiner oder gleich“		
$\geq$	„grösser oder gleich“		
] [	„offenes Intervall“	$]a; b[\ = \{x \mid a < x \wedge x < b\}$ $= \{x \mid a < x < b\}$	Alle Zahlen zwischen a und b, <u>exkl.</u> a und b
[ ]	„abgeschlossenes Intervall“	$[a; b] = \{x \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$ $= \{x \mid a \leq x \leq b\}$	Alle Zahlen zwischen a und b, <u>inkl.</u> a und b
[[	„links abgeschlossenes, rechts offenes Intervall“	$[a; b[\ = \{x \mid a \leq x \wedge x < b\}$ $= \{x \mid a \leq x < b\}$	Alle Zahlen zwischen a und b, <u>inkl.</u> a, <u>exkl.</u> b
]]	„links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall“	$]a; b] = \{x \mid a < x \wedge x \leq b\}$ $= \{x \mid a < x \leq b\}$	Alle Zahlen zwischen a und b, <u>exkl.</u> a, <u>inkl.</u> b

Bemerkung:

Falls die Grenzen der Intervalle $-\infty$ oder ∞ sind, dann werden die offenen Intervalle gebraucht:

$]-\infty; b]$ $[a; \infty[$ $]-\infty; \infty[$

1.2. Zahlen



Beispiele von rationalen (= „als Bruch darstellbare") Zahlen: $\frac{2}{3}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{4}{1} = 4$, $\frac{3}{1} = 3$

Beispiele von Zahlen, die nicht rational sind: π, $\sqrt{2}$, usw.

Zahlenbereich	Zeichen	Menge
natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$, **N**	{0, 1, 2, ...}
ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$, **Z**	{..., -2, -1, 0, 1, 2 ...}
rationale Zahlen	Q	$\{r = p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0\}$ = Menge aller Brüche = Menge der endlichen und unendlichen, periodischen Dezimalzahlen.
irrationale Zahlen	$\mathbb{I}$, **I**	Menge aller Zahlen, die nicht als Brüche dargestellt werden können = Menge der unendlichen, nicht periodischen Dezimalzahlen.
reelle Zahlen	$\mathbb{R}$, **R**	Menge aller Zahlen, die wir kennen.

***** Die Zahl Null wird aus der Zahlenmenge ausgeschlossen. N^* {1, 2, 3, ...}
+ Es sind nur die positiven Zahlen und die Null zu nehmen. Z_+ {0, 1, 2, 3, ...}
- Es sind nur die negativen Zahlen und die Null zu nehmen. Z_- {..., -3, -2, -1, 0}

1.3. Der Betrag

Der **Betrag einer Zahl a** ist der Abstand der Zahl vom Nullpunkt.

$$|a| = \begin{cases} a \text{ für } a \geq 0 \\ -a \text{ für } a < 0 \end{cases}$$

Rechenregel:
Der **Betrag eines Produkts** (resp. Quotienten) ist gleich dem Produkt (resp. Quotient) der Beträge.

I) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
II) $|a / b| = |a| / |b|$

Der **Betrag einer Summe** ist kleiner oder gleich der Summe der Beträge.

III) $|a + b| \leq |a| + |b|$ mit „=" ⇔ wenn a und b die gleichen Vorzeichen haben.

Weitere Gesetze

IV) $|-a| = |a|$
V) $|b - a| = |a - b|$

1.4. Grundgesetze für das Rechnen mit reellen Zahlen

Addition

1. **Kommutativgesetz** (KG) | Vertauschungsgesetz
   $a + b = b + a$

2. **Assoziativgesetz** (AG) | Verknüpfungsgesetz, Verbindungsgesetz
   $(a + b) + c = a + (b + c)$

3. **Neutralelement** (NE)
   $a + 0 = 0 + a = a$

4. **inverses Element** (IE) (wobei a ≠ 0)
   $a + (-a) = 0$

Multiplikation

1. **Kommutativgesetz** (KG) | Vertauschungsgesetz
   $a \cdot b = b \cdot a$

2. **Assoziativgesetz** (AG) | Verknüpfungsgesetz, Verbindungsgesetz
   $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

3. **Neutralelement** (NE)
   $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

4. **inverses Element** (IE)
   $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

Verbindung von Addition und Multiplikation - Distributivgesetz (DG)

$a \cdot (b + c) = ab + ac$
$(a + b) \cdot c = ac + bc$

1.5. Primzahlen, Primzahldarstellung

Primzahlen sind Zahlen, die nur durch 1 und sich selber teilbar sind.

Beispiele: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101

Teilbarkeitsregeln für natürliche Zahlen

Eine natürliche Zahl ist durch…
... 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer durch 2 teilbar ist.
... 3 teilbar, wenn ihre Quersumme, d.h. die Summe ihrer Ziffern, durch 3 teilbar ist.
... 4 teilbar, wenn sie in den letzten zwei Ziffern durch 4 teilbar ist.
... 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 5 oder eine 0.
... 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
... 8 teilbar, wenn sie in den letzten 3 Ziffern durch 8 teilbar ist.
... 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
... 10 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 ist.
... 25 teilbar, wenn ihre letzte 2 Ziffern durch 25 teilbar sind.
... 125 teilbar, wenn ihre letzte 3 Ziffern durch 125 teilbar sind.

1.6. ggT und kgV

ggT – grösster gemeinsamer Teiler

1. Faktorzerlegung der Zahlen, bis alle Faktoren prim sind,
2. ggT = Produkt aller gemeinsamen Primfaktoren

Beispiel: ggT(24,36,60)
24 = 2 · 2 · 2 · 3
36 = 2 · 2 · 3 · 3
60 = 2 · 2 · 3 · 5
ggT=2 · 2 · 3 = 12

kgV - kleinstes gemeinsames Vielfaches

1. Faktorzerlegung der Zahlen, bis alle Faktoren prim sind,
2. Für jeden Primfaktor wird die grösste Häufigkeit markiert.
   kgV = Produkt aller markierten Primfaktoren.

Beispiel: kgV(24,36,60)
24 = 2 · 2 · 2 · 3
36 = 2 · 2 · 3 · 3
60 = 2 · 2 · 3 · 5
kgV=2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 5 = 360

1.7. Prozentrechnen

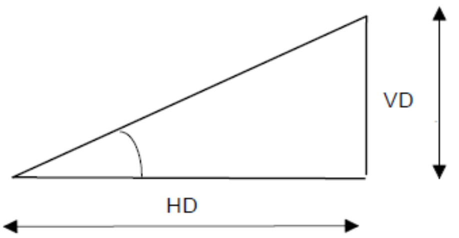
Variable	Name	Bedeutung	Beispiel
$p = i \cdot 100$	Zinsfuss	Anzahl der Prozente	p = 8
$i = \frac{p}{100}$ $i = p\%$	Zinssatz	Angabe der Prozente in der Dezimalschreibweise. i entspricht dem Zins, der bei einem Kapital von Fr 1.- bei p% ausbezahlt wird.	$i = \frac{8}{100} = 0{,}08$ $i = 8\%$
$q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + i$ Es gilt: q > 1	Zinsfaktor	q entspricht dem Kapital nach einem Jahr, wenn 1 Franken ein Jahr zu p% angelegt wird.	q = 1,08
$q = 1 - \frac{p}{100} = 1 - i$ Es gilt: 0 < q < 1		q entspricht dem Wert einer Anlage, die innerhalb eines Jahres von 1 Franken um p% abgeschrieben wurde.	q = 0,92
$p = 100(1 - q)$		Abschreibungssatz	8%

Bitte beachten Sie: p = 8% heisst p = 0,08, somit i = 0,08% = 0,0008 !
q = 1 + i; i = q -1 · 100%

Veränderung in Prozent

$$\text{Relative Veränderungsrate} = \frac{\text{absolute Veränderung}}{\text{ursprünglicher Wert}} = \frac{\text{neuer Wert} - \text{ursprünglicher Wert}}{\text{ursprünglicher Wert}}$$

Steigung – Prozentrechnen im alltäglichen Leben



$$\text{Steigung} = \frac{VD}{HD}$$

$$\text{Steigung in \%} = \frac{VD}{HD} \cdot 100$$

Die Strasse steigt auf einer Länge von 100m um 7m.

1.8. Zinsrechnen

$$\mathbf{K_1 = Kapital\ nach\ 1\ Jahr = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot q}$$

$$K_2 = \text{Kapital nach 2 Jahren} = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = K_1 \cdot q = \underbrace{K_0 \cdot q}_{=K_1} \cdot q = K_0 \cdot q^2$$

$$K_3 = \text{Kapital nach 3 Jahren} = K_2 + K_2 \cdot \frac{p}{100} = K_2\left(1+\frac{p}{100}\right) = K_2 \cdot q = \underbrace{K_0 \cdot q^2}_{=K_2} \cdot q = K_0 \cdot q^3$$

$$\mathbf{K_n = Kapital\ nach\ n\ Jahren = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = K_0 \cdot q^n}$$

$K_0 = \text{Anfangskapital}$ $p = \text{Zinssatz}$ $q = 1 + \frac{p}{100}$

Nach den verschiedenen Werten aufgelöst:

Barwert K_0:

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n}$$

Zinssatz q / i:

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

resp. weil q = 1 + i ist, gilt

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Zeitdauer n:

$$n = \frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg(q)} = \frac{\lg(K_n) - \lg(K_0)}{\lg(q)}$$

Zinssatz q Durchschnitt:

$$q = \sqrt[n]{q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n}$$

Beispiel:
K_0 = 14‘000.- CHF
n = 20 Jahre
p = 6.5
K_{20} = ?

Lösung:
p = 6.5 ⇒ q = 1 +6.5/100 = 1.065

$K_{20} = 14‘000 \cdot 1.065^{20} = 49‘331.03$

1.9. Degressive Abschreibung

$$\mathbf{I_1 = Wert\ nach\ 1\ Jahr = I_0 - I_0 \cdot \frac{p}{100} = I_0\left(1-\frac{p}{100}\right) = I_0 \cdot q}$$

$$I_2 = \text{Wert nach 2 Jahren} = I_1 - I_1 \cdot \frac{p}{100} = I_1\left(1-\frac{p}{100}\right) = I_1 \cdot q = \underbrace{I_0 \cdot q}_{=I_1} \cdot q = I_0 \cdot q^2$$

$$I_3 = \text{Wert nach 3 Jahren} = I_2 - I_2 \cdot \frac{p}{100} = I_2\left(1-\frac{p}{100}\right) = I_2 \cdot q = \underbrace{I_0 \cdot q^2}_{=I_2} \cdot q = I_0 \cdot q^3$$

$$\mathbf{I_n = Wert\ nach\ n\ Jahren = I_0\left(1-\frac{p}{100}\right)^n = I_0 \cdot q^n}$$

$I_0 = \text{Neuwert}$ $p = \text{Abschreibungssatz}$ $q = 1 - \frac{p}{100}$

Beispiel:
Neuwert einer Maschine: I_0 = 140‘000.- CHF
Abschreibungsdauer: n = 7 Jahre
Abschreibungssatz: p = 12
Wert der Maschine nach 7 Jahren, I_7 = ?

Lösung:
p = 12 ⇒ q = 1 – 12/100 = 0.88

$I_7 = 140‘000 \cdot 0.88^7 = 57‘214.58$

1.10. Aussagenlogik (Term, Aussage, Aussageform, NICHT, UND, ODER-Verknüpfungen)

Term

Ein Term ist eine sinnvolle Zusammensetzung von Zahlen, Variablen, Operationszeichen und Klammern.

Ein Term hat keinen Wahrheitsgehalt, ist also weder wahr noch falsch.

Beispiele: T(a,b), 4, x, -a, |z|, $\sqrt{a}$, a+b, $\frac{a}{b}$, a^2, $\frac{-u^2+2v}{|u-7|}$

Aussage

Eine Aussage beschreibt durch Worte oder Zeichen einen Sachverhalt.
Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Beispiele: 2+5=7, 19 ist eine Primzahl, Mozart war ein Mathematiker

Aussageform

Jeder sprachliche oder zeichensymbolische Ausdruck mit wenigstens einer Variablen heisst Aussageform, wenn er durch jede „sinnvolle" Belegung der Variablen jeweils eine Aussage wird.

Beispiele: x ist Teiler von y, … ist ein schweizerischer Fluss
KEINE Aussageform: Das Auto des Herrn x, 3x + 7, $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $x + 3 = 3 + x$
Beachten Sie: Sobald „Für alle" oder „es existiert" steht, ist es eine Aussage, die eben entweder wahr oder falsch ist.

Die „NICHT"-Verknüpfung (Negation, NOT)

A	¬A = B	¬B = ¬(¬A) = A
0	1	0
1	0	1

Der Eingang wird Invertiert, d.h. aus einer 0 wird eine 1 und umgekehrt.

in Worten: ¬A = „Nicht A"
Regel: ¬(¬A) = A (Analog Mengenlehre $\bar{\bar{A}} = A$)

Die „UND"-Verknüpfung (Konjunktion, AND)

A	B	A ∧ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Der Ausgang ist nur 1 wenn beide Eingänge 1 sind.

in Worten: ∧ = „UND" resp. „AND"
Regel: A ∧ B = B ∧ A
(A ∧ B) ∧ C = A ∧ (B ∧ C)

Die „ODER"-Verknüpfung (Disjunktion, OR)

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Der Ausgang ist 1 wenn mindestens ein Eingang 1 ist.

in Worten: ∨ = „ODER" resp. „OR"
Regel: A ∨ B = B ∨ A
(A ∨ B) ∨ C = A ∨ (B ∨ C)

1.11. Das Summenzeichen

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots\ldots + a_n$$

$$\text{für } n, m \in Z \quad \text{und } n \geq m$$

Bezeichnungen der 3 Indizes m, n & i:

n Summationsobergrenze

m Summationsuntergrenze

i Summationsindex:

i erhöht sich beim nachfolgenden Summanden um 1

i beginnt bei der Summationsuntergrenze m

i endet mit der Summationsobergrenze n

Beispiel:

$$s = \sum_{k=1}^{4} (2k-1) = \left(2 \cdot \underbrace{1}_{k=1} - 1\right) + \left(2 \cdot \underbrace{2}_{k=2} - 1\right) + \left(2 \cdot \underbrace{3}_{k=3} - 1\right) + \left(2 \cdot \underbrace{4}_{k=4} - 1\right) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

1.12. Das Produktzeichen

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \ldots\ldots \cdot a_n$$

$$\text{für } n, m \in Z \quad \text{und } n \geq m$$

Bezeichnungen der 3 Indizes m, n & i: Gleich wie beim Summenzeichen

Beispiel:

$$p = \prod_{r=5}^{8} \frac{r}{r+2} = \frac{5}{5+2} \cdot \frac{6}{6+2} \cdot \frac{7}{7+2} \cdot \frac{8}{8+2} = \frac{5}{7} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{8}{10} = \frac{1680}{5040} = \frac{1}{3}$$

1.13. Die Fakultät

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i & \text{für } n>0,\ n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{für } n=0 \end{cases}$$

gesprochen: "n Fakultät"

Man beachte: 0! = 1

Beispiel:

$$3! \cdot 5! = (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 720$$

$$\frac{6!}{4! \cdot 1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{30}{1} = 30$$

1.14. Binomische Formel

$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)\cdot(a-b) = (a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$

1.15. Binomischer Lehrsatz (Pascalsche Dreieck)

Zeile	Pascalsches-Dreick	Binomische Formeln:
1	1	$(a+b)^0 = 1$
2	1 1	$(a+b)^1 = a + b$
3	1 2 1	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4	1 3 3 1	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5	1 4 6 4 1	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
6	1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

1.16. Dezimalvorsätze

Vorsatz		Wert		
Y	Yotta	$(10^3)^8 = 10^{24}$	1.000.000.000.000.000.000.000.000	Quadrillion
Z	Zetta	$(10^3)^7 = 10^{21}$	1.000.000.000.000.000.000.000	Trilliarde
E	Exa	$(10^3)^6 = 10^{18}$	1.000.000.000.000.000.000	Trillion
P	Peta	$(10^3)^5 = 10^{15}$	1.000.000.000.000.000	Billiarde
T	Tera	$(10^3)^4 = 10^{12}$	1.000.000.000.000	Billion
G	Giga	$(10^3)^3 = 10^9$	1.000.000.000	Milliarde
M	Mega	$(10^3)^2 = 10^6$	1.000.000	Million
k	Kilo	$(10^3)^1 = 10^3$	1.000	Tausend
h	Hektor	10^2	100	Hundert
da	Deka	10^1	10	Zehn
		10^0	1	Eins
d	Dezi	10^{-1}	0,1	Zehntel
c	Zenti	10^{-2}	0,01	Hundertstel
m	Milli	$(10^{-3})^1 = 10^{-3}$	0,001	Tausendstel
µ	Mikro	$(10^{-3})^2 = 10^{-6}$	0,000.001	Millionstel
n	Nano	$(10^{-3})^3 = 10^{-9}$	0,000.000.001	Milliardstel
p	Piko	$(10^{-3})^4 = 10^{-12}$	0,000.000.000.001	Billionstel
f	Femto	$(10^{-3})^5 = 10^{-15}$	0,000.000.000.000.001	Billiardstel
a	Atto	$(10^{-3})^6 = 10^{-18}$	0,000.000.000.000.000.001	Trillionstel
z	Zepto	$(10^{-3})^7 = 10^{-21}$	0,000.000.000.000.000.000.001	Trilliardstel
y	Yokto	$(10^{-3})^8 = 10^{-24}$	0,000.000.000.000.000.000.000.001	Quadrillionstel

2. Höhere Rechenoperationen

2.1. Potenzrechnen

$b = a^n$ a ist die Basis n der Exponent

Fall 1: Rechengesetze mit unterschiedlichen Basen und gleicher Exponent

	Regel	Beispiel
Produkt Regel	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$4^3 \cdot 3^3 = (4 \cdot 3)^3$
Quotienten Regel	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \ (solange\ b \neq 0)$	$\frac{4^3}{2^3} = \left(\frac{4}{2}\right)^3$
Achtung	$a^n + b^n \neq (a+b)^n$	$2^3 + 3^3 \neq (2+3)^3$

Fall 2: Rechengesetze mit gleicher Basis und unterschiedlichen Exponenten

	Definition		Beispiel
Regel 1	$a^0 = 1$	$a \neq 0$	$25^0 = 1$
Regel 2	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$		$5^4 \cdot 5^2 = 5^{4+2} = 5^6 = 15'625$
Regel 3	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a \neq 0$	$5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625} = 0{,}0016$
Regel 4	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$a \neq 0$	$\frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2 = 25$
Regel 5	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$		$(5^4)^2 = 5^{4 \cdot 2} = 5^8 = 390'625$
Regel 6	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$n \neq 0$	$\sqrt[4]{625} = 625^{\frac{1}{4}} = 625^{0.25} = 25$
Regel 7	$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$	$m \neq 0$	$5^{\frac{4}{2}} = \sqrt[2]{5^4} = \sqrt{5^4} = \sqrt{625} = 25$
Regel 8	$a^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$	$m \neq 0$	$9^{\frac{4}{2}} = \left(\sqrt[2]{9}\right)^4 = 3^4 = 81$

Potenzwerte lassen sich nur dann **addieren** bzw. **subtrahieren**, wenn sie sowohl in ihren Basen als auch in ihren Exponenten **übereinstimmen**.

2.2. Die Exponentialform von Zahlen

Die Exponentialform einer Zahl z lautet:

$$z = a \cdot 10^b mit\ 1 \leq |a| < 10\ und\ b \in \mathbb{Z}$$

Wobei die „1“ nicht geschrieben wird.

$1\underbrace{00\ldots000}_{n\ Stellen} = 1 \cdot 10^n = 10^n$

$0{,}312 \cdot 10^9 = 3.12 \cdot 10^8 = 3\underbrace{12'000'000}_{8\ Stellen}$

$0,\underbrace{00\ldots001}_{n\ Stellen} = 1 \cdot 10^{-n}$

$0{,}312 \cdot 10^{-9} = 3{,}12 \cdot 10^{-10} = 0,\underbrace{000'000'000'3}_{10\ Stellen}12$

2.3. Wurzelrechnen

Definition:

I) $a \geq 0$: $\sqrt{a}$ ist diejenige **positive** Zahl deren Quadrat die positive Zahl a ergibt.

II) $a < 0$: $\sqrt{a}$ wird nicht definiert

Rechengesetze:

		Regel	Bedingung/Bemerkung
I)	Produkt Regel	$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$(a, b \geq 0)$
II)	Quotienten Regel	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$(a \geq 0, b > 0)$
III)	Achtung	$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$	
IV)	Vertausche Wurzelzeichen und Quadrieren:	$\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	$(a \geq 0)$
V)	Wurzelziehen aus a^2 mit a < 0:	$\sqrt{a^2} = -a$	(für $a < 0$)
VI)	Folgerungen aus (IV) & (V):	a) $\sqrt{a^2} = \vert a\vert$ b) $\sqrt{a^2} \neq \left(\sqrt{a}\right)^2$	Zu b) denn für a < 0 ist $\sqrt{a}$ nicht definiert.
VII)	Beachte den Unterschied! (Rein-) Quadratische Gleichungen lösen und Wurzelziehen ist nicht dasselbe!	$\sqrt{64} = 8$	$x^2 = 64$ hat die Lösungen $x_1 = 8$ und $x_2 = -8$

Musterbeispiele:

Addition und Subtraktion	
1	$7\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - \sqrt{2} = (7-4)\sqrt{3} + (5-1)\sqrt{2} = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$
2	$x\sqrt{a} + y\sqrt{a} = (x+y)\sqrt{a}$
3	$x\sqrt{a} - y\sqrt{a} = (x-y)\sqrt{a}$
4	$x\sqrt{a} + x\sqrt{b} = x\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$
Multiplikation und teilweise radizieren	
5	$\sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 16} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{3} \cdot 4 = 4\sqrt{3}$
6	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$
7a	$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = \vert a\vert \cdot \sqrt{b}$
7b	Es gelte nun: a,b ≥0 dann gilt: $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = \vert a\vert \cdot \sqrt{b} = a \cdot \sqrt{b}$
Division	
8	$\sqrt{72} : \sqrt{8} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{72}{8}} = \sqrt{9} = 3$
9	$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
10	$\sqrt{48} : \sqrt{\frac{27}{2}} = \sqrt{3 \cdot 16} : \frac{\sqrt{3 \cdot 9}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$
11	$\left(\sqrt{48} + \sqrt{27}\right) : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} + \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$

Der Nenner ist wurzelfrei zu machen	
11	$\left(\sqrt{48}+\sqrt{27}\right):\sqrt{3}=\frac{\sqrt{48}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{48}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{48}+\sqrt{27}\right)\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=$ $\frac{\sqrt{48}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{48\cdot 3}+\sqrt{27\cdot 3}}{3}=\frac{\sqrt{144}+\sqrt{81}}{3}=\frac{12+9}{3}=\frac{21}{3}=7$
12	$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$
13	$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{15}-2\cdot 3}{5-3}=\frac{2\sqrt{15}-6}{2}=$ $\frac{2\left(\sqrt{15}-3\right)}{2}=\sqrt{15}-3$

Beispiel: $\sqrt{\frac{1}{2}}:\sqrt{2}$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}:\sqrt{2} \quad = \quad \sqrt{\frac{1}{2}}:\sqrt{\frac{2}{1}} \quad = \quad \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} \quad = \quad \frac{1}{2}$$

Im Detail:

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} \quad = \quad \sqrt{\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}} \quad = \quad \sqrt{\frac{1}{4}} \quad = \quad \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} \quad = \frac{1}{2}$$

2.4. n-te Wurzel berechnen

Definition:

I) $a \geq 0: \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (n \neq 0)$

II) $a < 0: \textit{wird nicht definiert}$

Rechengesetze:

	Regel	
Produkt Regel	$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	$(a,b\ \geq 0)$
Quotienten Regel	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$(a \geq 0, b > 0)$
Achtung	$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\neq\sqrt[n]{a+b}$	
Vertausche n-te Wurzel und Potenzieren:	$\sqrt[n]{a^n}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$	$(a \geq 0)$

2.5. Logarithmen & Logarithmengesetze

Die Gleichung **$c = a^b$** ist auf alle Variablen aufzulösen.
Der Einfachheit halber setzen wir immer die aufzulösende Variable auf x.

Fall 1:	Gegeben:	a und b
	Gleichung:	**$x = a^b$**
	Berechnung:	**Potenzieren: $x = a^b$**
	Beispiel:	$a = 5, b = 3 \Rightarrow x = 5^3 = 125$
Fall 2:	Gegeben:	b und c
	Gleichung:	**$c = x^b$**
	Berechnung:	**b-te Wurzel aus c ziehen $x = \sqrt[b]{c}$:**
	Beispiel:	$b = 3, c = 125 \Rightarrow x = \sqrt[3]{125} = 5$
Fall 3:	Gegeben:	a und c
	Gleichung:	**$c = a^x$**
	Berechnung:	**Logarithmieren: $x = \log_a c$ (Logarithmus von c zur Basis a)**
	Beispiel:	$a = 5, c = 125 \Rightarrow x = \log_5 125$ = (Logarithmus von 125 zur Basis 5) Mit dem Taschenrechner $\log_5 125 = \frac{\lg 125}{\lg 5} = 3$

@TI30: [**LOG**] [**1**] [**2**] [**5**] [**)**] [÷] [**LOG**] [**5**] [**=**]

Definition:

Die Lösung x der Gleichung $c = a^x$ ($a \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\} = \mathbb{R}_+\setminus\{0,1\}$) lautet:

$x = \log_a c$

"Logarithmus von c zur Basis a"

Begriffe:

I) a heisst "**Basis**" des Logarithmus
II) c heisst "**Numerus**"
III) x heisst "**Logarithmus**"

Einen Logarithmus zu einer beliebigen Basis a
kann man zur Basis e oder zur Basis 10 darstellen:

$$\log_a c = \frac{\log_{10} c}{\log_{10} a} = \frac{\log c}{\log a} = \frac{\lg c}{\lg a} = \frac{\log_e c}{\log_e a} = \frac{\ln c}{\ln a}$$

Beispiele:

$\log_a 1$	= 0	da $a^0 = 1$
$\log_a a$	= 1	da $a^1 = a$
$\log_2 32$	= 5	da $2^5 = 32$
$\log_3 \frac{1}{9}$	= -2	da $3^{-2} = \frac{1}{9}$
$\log_{-2} 4$	=	Es gibt keinen Logarithmus zu negativen Basen!
$\log_3 (-9)$	=	Der Wert des Numerus muss eine positive Zahl sein!
$\log_1 5$	=	Es gibt keinen Logarithmus zur Basis 1 (und auch nicht zur Basis 0)

Logarithmengesetze:

	Gesetz	Beispiel
1	$\log_a(c \cdot d) = \log_a c + \log_a d$	$\lg 100'000 = \lg(100 \cdot 1'000) =$ $\lg 100 + \lg 1'000 = 2 + 3 = 5$
2	$\log_a(c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n) =$ $\log_a(c_1) + \log_a(c_2) + \cdots + \log_a(c_n)$	$\log_2(512) = 9$ $\log_2(512) = \log_2(4 \cdot 8 \cdot 16) =$ $= \log_2(4) + \log_2(8) + \log_2(16) = 2 + 3 + 4 = 9$
3	$\log_a(c^d) = d \cdot \log_a c$	$\lg 10^5 = \lg 100'000 = 5$ $\lg 10^5 = 5 \cdot \log 10 = 5 \cdot 1 = 5$
4	$\log_a\left(\frac{1}{d}\right) = -\log_a d$	$\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$ $\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -\log_2(16) = -\log_2(2^4) = (-1) \cdot 4 = -4$
5	$\log_a\left(\frac{c}{d}\right) = \log_a c - \log_a d$	$\log_2\left(\frac{64}{16}\right) = \log_2 4 = 2$ $\log_2\left(\frac{64}{16}\right) = \log_2 64 - \log_2 16 = 6 - 4 = 2$
6	$\log_a(\sqrt[n]{c}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a c$	$\log_2(\sqrt[2]{64}) = \log_2(8) = 3$ $\log_2(\sqrt[2]{64}) = \log_2\left(64^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log_2(64) = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$
7	$a^{\log_a c} = c$	$2^{\log_2 5} = 5$
8	$\log_a(a^b) = b$	$\log_7(7^3) = 3$

Beweis der Umwandlungsformel mit dem 10-er Logarithmus:

$a^x = c$ | den Log zur Basis 10 rechnen

$\lg a^x = \lg c$ | Logarithmengesetze verwenden

$x \lg a = \lg c$ | mit lg a dividieren; da $a \neq 1 \Rightarrow \lg a \neq 0$

$$x = \frac{\lg c}{\lg a}$$

2.6. Verschiedene Aufgaben

Musterbeispiele:

$$\log_{0,25} 4711 = \frac{\lg 4711}{\lg 0.25} = -6.101$$

$$4^x = 1024 \Rightarrow x = \log_4 1024 = \frac{\lg 1024}{\lg 4} = 5$$

$$(0,2)^x = 125 \Rightarrow x = \log_{0,2} 125 = \frac{\lg 125}{\lg 0,2} = -3$$

<u>Aufgabe:</u> Wie lange muss ein Kapital von 1‘200.- CHF bei 4% angelegt werden, damit es auf 1847.- anwächst?

<u>Lösung:</u> Es ist die folgenden Exponentialgleichung zu lösen: $1200 \cdot 1,04^x = 1847 \Rightarrow 1,04^x = \frac{1847}{1200}$

$$x = \log_{1,04} \frac{1847}{1200} = \frac{\lg\left(\frac{1847}{1200}\right)}{\lg 1,04} = 10,995 \Rightarrow \text{Nach 11 Jahren erreicht das Kapital den Wert } 1'847.-$$

Aufgabe 1:

Vereinfachen Sie soweit als möglich:

$$\underline{\sqrt[3]{x \cdot 8 \cdot \sqrt{x}} - \sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad x^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3\cdot 2}} - x^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{x^{\frac{1}{2}}}} = \underline{\underline{\sqrt{x}}}$$

Aufgabe 2:

Vereinfachen Sie soweit als möglich. Das Resultat ist ohne Wurzelzeichen anzugeben.

$$\underline{a \cdot \sqrt[n]{a^{1-n} \cdot \sqrt[n]{a^{1-n}}}} \quad \Rightarrow \quad a \cdot a^{\frac{1-n}{n}} \cdot a^{\frac{1-n}{n^2}} = a^{1+\frac{1-n}{n}+\frac{1+n}{n^2}} = a^{\frac{n^2+n-n^2+1-n}{n^2}} = \underline{\underline{a^{\frac{1}{n^2}}}}$$

Aufgabe 3:

Schreiben Sie in der Form a^b (ohne Wurzelzeichen!) mit natürlicher Basis.

$$\underline{\sqrt[5]{\frac{0.5}{c}}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2c}\right)^{\frac{1}{5}} = ((2c)^{-1})^{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{(2c)^{-\left(\frac{1}{5}\right)}}} = \underline{\underline{(2c)^{-0.2}}}$$

Aufgabe 4:

Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen, und vereinfachen Sie soweit als möglich.

$$\underline{\lg(a^2 - b^2) - \frac{1}{2} \cdot \lg(a+b) - 2 \cdot \lg(a-b)} \quad \Rightarrow \quad \lg(a^2-b^2) - \lg\sqrt{a+b} - \lg(a-b)^2 =$$

$$\lg\frac{(a^2-b^2)}{\sqrt{a+b} \cdot (a-b)^2} = \lg\frac{(a-b)\cdot(a+b)}{(a-b)\cdot(a-b)\cdot\sqrt{a+b}} = \underline{\underline{\lg\frac{\sqrt{a+b}}{(a-b)}}}$$

Aufgabe 5:

Vereinfachen Sie den Ausdruck soweit als möglich.

$$\underline{\log_{10}\frac{10^a}{100} \cdot \log_{10}\frac{100(a^2-b^2)}{(a+b)(a-b)}} \quad \Rightarrow \quad \log_{10} 10^{a-2} \cdot \log_{10} 100 = (a-2) \cdot \log 100 = \underline{\underline{2 \cdot (a-2)}}$$

Aufgabe 6:

Schreiben Sie den folgenden Ausdruck als Summe und/oder Differenz von Logarithmen.

$$\underline{\ln\frac{3a^2 \cdot \sqrt[4]{cd^3}}{\sqrt[3]{f} \cdot g^{1.5}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\ln 3 + 2 \cdot \ln a + \frac{1}{4} \cdot \ln c + \frac{3}{4} \cdot \ln d - \frac{1}{3} \cdot \ln f - 1.5 \cdot \ln g}}$$

Aufgabe 7:

Vereinfachen Sie den Ausdruck soweit als möglich.

$$\underline{\log_2\frac{\sqrt{8}}{2^m}} \quad \Rightarrow \quad \log_2\sqrt{2^3} - \log_2 2^m = \log_2 2^{\frac{3}{2}} - \log_2 2^m = \underline{\underline{\frac{3}{2} - m}}$$

3. Mengenlehre

3.1. Mathematische Zeichen

Beispiele: A={a, b, c}, B={b, c, d}, C={a, c}, Grundmenge G={a, b, c, d, e, f}

Zeichen	Bedeutung	Beispiel
$\lvert A \rvert$	Anzahl der Elemente der Menge A	$\lvert A\rvert = \lvert \{a, b, c\} \rvert = 3$
$\lvert A\rvert = \lvert B\rvert$	A und B sind gleichmächtig	$\lvert\{a,b,c\}\rvert = \lvert\{b,c,d\}\rvert = 3$
$\{\} = \emptyset$	Die leere Menge	
$\subset$ oder $\subseteq$	Echte oder unechte Teilmenge	$C \subset A$
$\subsetneq$ oder $\subset$	Echte Teilmenge	$C \subsetneq A$
$\not\subset$ oder $\not\subseteq$	Nicht Teilmenge von	$C \not\subset B$
$\cup$	Vereinigung	$A \cup B = \{a, b, c, d\}$
$\cap$	Durchschnitt	$A \cap B = \{b, c\}$
$\setminus$	Differenz	$B \setminus A = \{d\}$
$\bar{A}$ *oder* $-A = A^c$	Komplementmenge	$\bar{A} = \{d, e, f\}$
x	Produkt	A x C = {(a,a), (a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,c)}

3.2. Darstellung von Mengen

Aufzählende Form		Bildungsvorschrift	beschreibende Form	Mächtigkeit
A)	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	{n | n ist eine natürliche Zahl} (*) oder $\{n \mid n \in \mathbb{N}\}$	Die Menge der natürlichen Zahlen.	∞
B)	M = {1, 4, 9, 16, 25, … }	$\{m \in \mathbb{N}^* \mid$ m ist eine Quadratzahl$\}$ oder $\{m \in \mathbb{N}^* \mid n = n^2\}$	Die Menge der positiven Quadratzahlen.	∞
C)	T_{60} = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}	{t | t ist Teiler von 60}	Die Menge der Teiler der Zahl 60	12
D)	P = {0}	{p | p=0}	Die Menge mit dem Element Null	1
E)	L = {} = ∅	ex. nicht.	Die leere Menge = Die (eindeutige) Menge, die kein Element enthält.	0
F)	C = {1, 3, 5, 7, 9, … }	$\{x \mid x = 2y - 1, y \in \mathbb{N}^*\} =$ $\{x \mid x = 2y + 1, y \in \mathbb{N}\}$	Die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen.	∞
G)	S = {2, 4, 6, 8, … }	$\{x \mid x = 2y, y \in \mathbb{N}^*\}$	Die Menge aller geraden positiven Zahlen.	∞

(*) Ganz präzis heisst es: „Die Menge aller n, für die gilt: n ist eine natürliche Zahl“. Wobei „ | „ als Abkürzung für „für die gilt“ steht.

3.3. Anzahl Elemente

> Die Anzahl der Elemente einer Menge A heisst die
> **Mächtigkeit oder Kardinalität der Menge**.

Zeichen: $|A|$ = # Elemente von A
= Anzahl Elemente von A
= Mächtigkeit von A
= Kardinalität von A

> Zwei Mengen A und B heissen **gleichmächtig**,
> wenn sie die **gleiche Anzahl Elemente** haben.

d.h. $|A| = |B|$

3.4. Teilmenge

> Eine Menge **B heisst Teilmenge von A**,
> wenn **jedes Element von B auch in A enthalten** ist.

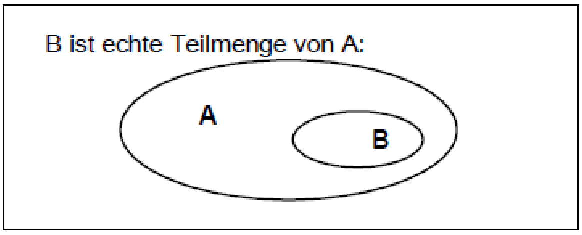
Schreibweise: $B \subset A$

> Eine Menge B heisst **echte Teilmenge** von A,
> wenn zwar jedes Element von B auch in A enthalten ist,
> es aber auch Elemente in A gibt, die nicht in B sind.

Schreibweise: $B \subsetneq A$

> Zwei Mengen A und B heissen gleich,
> wenn sie die genau gleichen Elemente besitzen.

Schreibweise: A = B

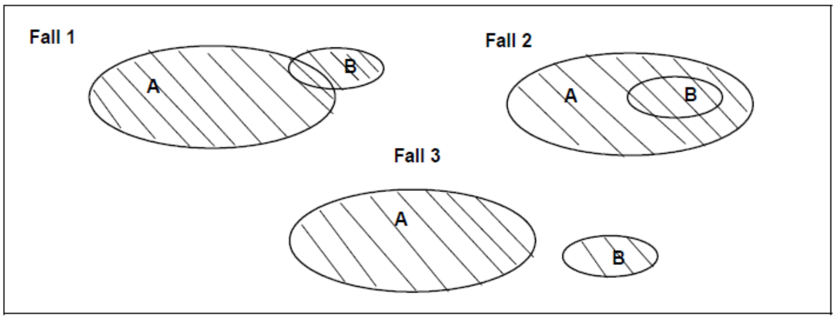


Bemerkungen:
1) „... ist keine Teilmenge von ...“ wird mit dem Zeichen $\not\subset$ beschrieben.
2) Die Menge A ist einzige unechte Teilmenge von A

3.5. Vereinigungsmenge

Die **Vereinigung** zweier Mengen A und B ist diejenige Menge, die die Elemente **von A <u>oder</u> von B** enthält.

Mathematisch: $A \cup B = \{x \mid x \in A \;\vee\; x \in B\}$



Gesetze der Vereinigung:

V1) $A \cup \{\} = A$

V2, KG*) $A \cup B = B \cup A$

V3, AG*) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

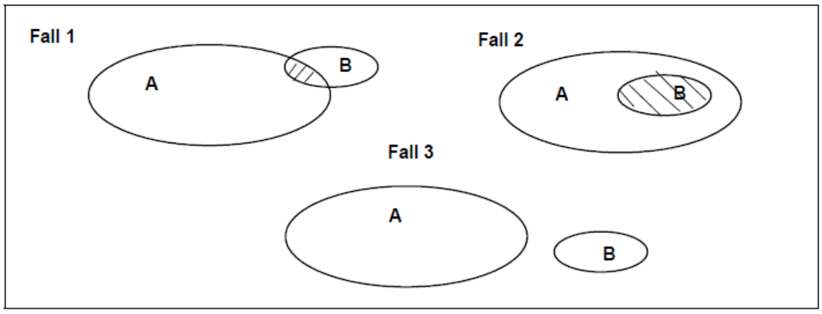
V4) $A \cup B = A$, falls $B \subset A$ (Fall 2)

* KG = Kommutativgesetz, AG = Assoziativgesetz

3.6. Durchschnittsmenge

Der **Durchschnitt** zweier Mengen A und B ist diejenige Menge, die die Elemente **von A <u>und</u> von B** enthält.

Mathematisch: $A \cap B = \{x \mid x \in A \;\wedge\; x \in B\}$



Gesetze des Durchschnitts:

D1) $A \cap \{\} = \{\}$

D2, KG*) $A \cap B = B \cap A$

D3, AG*) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

D4) $A \cap B = B$, falls $B \subset A$ (Fall 2)

Falls der Durchschnitt zweier Menge A und B die leere Menge ist (Fall 3) (d.h. $A \cap B = \{\}$), dann heissen diese Menge **disjunkt** oder **elementefremd**.

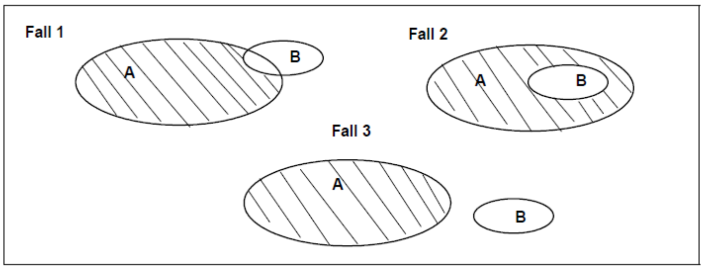
* KG = Kommutativgesetz, AG = Assoziativgesetz

3.7. Differenzmenge

Die **Differenz** zweier Mengen A und B ist diejenige Menge, die die Elemente **von A, nicht aber die von B** enthält.

Mathematisch: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \;\wedge\; x \notin B\}$

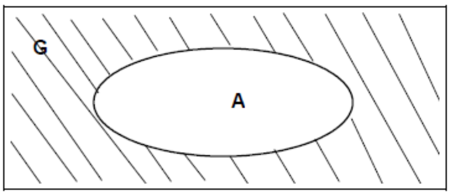
in Worten: „A ohne B“



3.8. Komplementärmenge

Die **Komplementärmenge** von A enthält alle Elemente von der Grundmenge G, die **nicht in A** sind.

Mathematisch: $\bar{A} = \{x \mid x \in G \ \wedge \ x \notin A\} = \{x \in G \mid x \notin A\}$
Schreibweise: Komplement A = $\bar{A}$



Bemerkung:
Hier gibt es nur diesen Fall, die anderen sind nicht möglich!

3.9. Produktmenge

Die **Produktmenge** A x B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Mathematisch: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$
Mathematisch: $A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B \text{ und } c \in C\}$

Sei $|A| = m$ und $|B| = n$, dann ist $|A \times B| = m \cdot n$

Beispiele:
A = {4, 5}
B = {x, y, z}
C = {$\otimes$, $\boxdot$}

1) A x B = {(4, x), (4, y), (4, z), (5, x), (5, y), (5, z)}
2) B x A = {(x, 4), (y, 4), (z, 4), (x, 5), (y, 5), (z, 5)}
3) A x B x C = {(4, x, $\otimes$), (4, x, $\boxdot$), (4, y, $\otimes$), (4, y, $\boxdot$),(4, z, $\otimes$), (4, z, $\boxdot$), (5, x, $\otimes$), (5, x, $\boxdot$), (5, y, $\otimes$), (5, y, $\boxdot$),(5, z, $\otimes$), (5, z, $\boxdot$)}

3.10. Weitere Gesetze

W1) $\bar{\bar{A}} = A$
W2) Sei G die Grundmenge, dann ist $\overline{\{\}} = G$
W3) Sei G die Grundmenge, dann ist $\bar{G} = \{\}$
W4) X \ {} = X
W5) Y \ $\bar{Y}$ = Y
W6) Y ∩ $\bar{Y}$ = {}
W7) Y ∪ $\bar{Y}$ = Grundmenge G

4. Gleichungen

4.1. Gleichungstyp

Nr	Gleichungstyp	Beispiel
1	lineare Gleichung	8x + 7 = 25
2	Bruchgleichung	$\frac{7}{2x}+\frac{5}{3x}+0{,}5=\frac{5}{12}$
3	Gleichung mit Formvariablen	$\frac{1+x}{1-x}=a$
4	Textgleichungen	Wird eine Zahl vervierfacht und mit 14 addiert, ergibt das Resultat 40. Wie heisst die Zahl?
5	Ungleichungen	2x > 6x -4
6	Textungleichungen	Man bestimme diejenigen natürlichen Zahlen, für die gilt, dass deren Vierfaches, um 3 vermindert, kleiner ist als ihr Dreifaches.
7	Gleichungen mit Betragszeichen	|x+2| = 4 **Probe machen!**
8	Lineare Gleichungssysteme	$\mathrm{I})\ 2x=6y-4$ $\mathrm{II})3x+4=2y$
9	Nicht lineare Gleichungssysteme	$\mathrm{I})\ 1/x+1/y=3$ $\mathrm{II})3/x-4/y=2$
10	Lineare Gleichungssysteme mit Formvariablen	$\mathrm{I})\ x-3y=-2a$ $\mathrm{II})2x+4y=a$
11	Gleichungssystem mit Textgleichungen	Welche zwei positive Zahlen haben die folgende Eigenschaft? Vergrössert man jede um 5, so wird die Differenz ihrer Quadrate um 100 grösser, während ihr Produkt um 325 zunimmt.
12	quadratische Gleichung	$x^2+5x-24=0$
13	einfache kubische Gleichungen	$5x^3+5x^2-60x=0$
14	Wurzelgleichung	$\sqrt{2x+3}=\sqrt{x+2}$ **Probe machen!**
15	Potenzgleichung	$x^6=64$ **Probe machen!**
16	Exponentialgleichung	$e^{3x-2}=e^{x+3}$
17	Logarithmusgleichung	ln(2x) + ln(6x) = ln(48) **(Probe machen!)**

4.2. Rechenregeln

Auf beiden Seiten der Gleichung darf man mit derselben Zahl addieren, subtrahieren, multiplizieren (!), dividieren (!) und Wurzelziehen.

I) Man darf *nicht* mit Null multiplizieren oder dividieren!
II) Man darf bei einem Rechenschritt rechts und links der Gleichung *nicht* mit verschiedenen Werte rechnen!

Wenn man auf beiden Seiten quadriert oder Betragszeichen setzt, können neue „Lösungen“ hinzukommen.

4.3. Ungleichungen mit „Null“ auf der rechten Seite

Ungleichung	Bedingung für a und b	
$a \cdot b > 0$	(a > 0 & b > 0) oder (a < 0 & b < 0)	a und b haben gleiche Vorzeichen
$a \cdot b < 0$	(a > 0 & b < 0) oder (a < 0 & b > 0)	a und b haben unterschiedliche Vorzeichen
$a \cdot b \geq 0$	$(a \geq 0$ & $b \geq 0)$ oder $(a \leq 0$ & $b \leq 0)$	
$a \cdot b \leq 0$	$(a \geq 0$ & $b \leq 0)$ oder $(a \leq 0$ & $b \geq 0)$	
$\frac{a}{b} > 0$	(a > 0 & b > 0) oder (a < 0 & b < 0)	a und b haben gleiche Vorzeichen
$\frac{a}{b} < 0$	(a > 0 & b < 0) oder (a < 0 & b > 0)	a und b haben unterschiedliche Vorzeichen
$\frac{a}{b} \geq 0$	$(a \geq 0$ & $b > 0)$ oder $(a \leq 0$ & $b < 0)$	
$\frac{a}{b} \leq 0$	$(a \geq 0$ & $b < 0)$ oder $(a \leq 0$ & $b > 0)$	

4.4. Gleichungen mit Formvariablen

Vorgehen:

0. Schritt: Vergewissern, welches die Lösungsvariable ist.
1. Schritt: Falls es Brüche hat, diese zuerst wegbringen
2. Schritt: Alle Terme mit x (resp. mit der Lösungsvariablen) auf die linke Seite, der Rest auf die rechte Seite bringen.
3. Schritt: x (resp. Lösungsvariable) auf der linken Seite Ausklammern.
4. Schritt: Der bei x (resp. Lösungsvariable) entstandene Faktor wegdividieren.

Musterbeispiel: Lösen Sie auf b auf.

$\frac{a}{b} - e$	=	$\frac{c}{x}$	| Gleichnamig machen, gemeinsamer Nenner ist bx D = R\{0}
$\frac{ax}{bx} - \frac{ebx}{bx}$	=	$\frac{bc}{bx}$	| Mit bx multiplizieren
ax - ebx	=	bc	| Alle Terme mit der Lösungsvariable (hier: b) nach links, der Rest nach rechts
-bc - ebx	=	-ax	| Zur Vereinfachung mit (-1) multiplizieren
bc + ebx	=	ax	| Die Lösungsvariable (hier: b) ausklammern.
b · (c + ex)	=	ax	| Der entstandene Faktor kann nun wegdividiert werden.
b	=	$\frac{ax}{c+ex}$	

$$\underline{\underline{L = \left\{\frac{ax}{c+ex}\right\}}}$$

4.5. Schwierige Ungleichungen

Bei **Multiplikation** oder **Division** mit einer **negativen Zahl ändert** sich das **Ungleichheitszeichen**.

Musterbeispiel 1:

$8x + 7$	$<$	25	$\mid -7$	D = R
$8x$	$<$	18	$\mid :8$	
x	$<$	$18/8$		

$L = \{x \mid x < 9/4\}$

Musterbeispiel 2:

$-8x + 7$	$<$	25	$\mid -7$	D = R
$-8x$	$<$	18	$\mid : -8$	
x	$>$	$-18/8$		

$L = \{x \mid x > -9/4\}$

Musterbeispiel 3:

$\frac{6}{x+2} < 2$ D = R\{-2}

Fall I: $x + 2 > 0$ d.h. $x > -2$

$\frac{6}{x+2}$	$<$	2	$\mid \cdot (x + 2)$
6	$<$	$2 \cdot (x + 2)$	
6	$<$	$2x + 4$	$\mid -4$
$2x$	$>$	2	$\mid :2$
x	$>$	1	

$L_1 = \{x \mid x > 1\}$

Fall II: $x + 2 < 0$ d.h. $x < -2$

$\frac{6}{x+2}$	$<$	2	$\mid \cdot (x + 2)$ => Ungleichheitszeichen kehrt !
6	$>$	$2 \cdot (x + 2)$	
6	$<$	$2x + 4$	$\mid -4$
$2x$	$<$	2	$\mid :2$
x	$<$	1	

$L_2 = \{x \mid x < -2\}$ (x < -2 weil beim Fall II x < -2 sein muss)

$L = L_1 \cup L_2 = \{x \mid x < -2 \text{ oder } x > 1\} = R\backslash[-2; 1]$

4.6. Ungleichungen mit 2 verschiedene Faktoren im Nenner

Musterbeispiel 1:

$$\frac{2}{x-3} < \frac{3}{x+5}$$ D = R\{-5;3}

Fall 1: (x–3) · (x+5) > 0 (Beide Faktoren müssen das gleiche Vorzeichen haben)

Fall 1a: (x-3) > 0 ∧ (x+5) > 0 d.h. x > 3 ∧ x > -5, also x > 3

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x+5) &< 3 \cdot (x-3) \\ 2x + 10 &< 3x - 9 \\ -x &< -19 \\ x &> 19 \end{aligned}$$

L_{1a} = {x | x > 19}

Fall 1b: (x-3) < 0 ∧ (x+5) < 0 d.h. x < 3 ∧ x < -5, also x < -5

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x+5) &< 3 \cdot (x-3) \\ 2x + 10 &< 3x - 9 \\ -x &< -19 \\ x &> 19 \end{aligned}$$

L_{1b} = { } (Leere Menge, weil x > 19, aber Fall Ib muss x < -5 sein)

Fall 2: (x–3) · (x+5) < 0 (Beide Faktoren müssen unterschiedliche Vorzeichen haben)

Fall 2a: (x-3) > 0 ∧ (x+5) < 0 d.h. x > 3 ∧ x < -5, unmöglich

Fall 2b: (x-3) < 0 ∧ (x+5) > 0 d.h. x < 3 ∧ x > -5, also -5 < x < 3

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x+5) &> 3 \cdot (x-3) \\ 2x + 10 &> 3x - 9 \\ -x &> -19 \\ x &< 19 \end{aligned}$$

L_{2a} = {x | -5 < x < 3} (weil bei Fall 2b -5 < x < 3 sein muss)

L = L_{1a} ∪ L_{2b} = {x | -5 < x < 3 oder x > 19}

4.7. Einfache Gleichungen mit Betragszeichen

Musterbeispiel:

|x + 5| = 3

Es sind zwei Gleichungen zu lösen:

Fall 1:

$$\begin{aligned} x + 5 &= 3 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$x_1 = -2$

Fall 2:

$$\begin{aligned} -(x + 5) &= 3 \\ -x - 5 &= 3 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

$x_2 = -8$

Somit ist L = {-8; -2}

Kontrolle durch Einsetzen der erhaltenen Werte in die Gleichung ist **zwingend**!
Je nach Ausgangsgleichung kann es Fälle geben wo die eingesetzten Werte keine gültige Aussage ergeben.

4.8. Lineare Gleichungssysteme

Lösungsverfahren:

- **Die Gleichsetzungsmethode**
  > Beide Gleichungen auf dieselbe Variable auflösen
  > die erhaltenen Terme gleichsetzen

- **Die Einsetzmethode**
  > Eine Gleichung auf eine Variable auflösen
  > den erhaltenen Term in die andere Gleichung einsetzen.

- **Die Additionsmethode**
  > Jede Gleichung geeignet multiplizieren
  > Durch die Addition der Gleichung fällt eine Variable weg

Die Gleichsetzungsmethode

$\mathrm{I)}\ 2x - 5y = 7 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7+5y}{2}$

$\mathrm{II)}\ 3x + 2y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1-2y}{3}$

Die Ausdrücke rechts von dem Gleichheitszeichen können nun gleichgesetzt werden:
$\frac{7+5y}{2} = \frac{1-2y}{3}$
Beide Seiten gleichnamig machen und Nenner wegmultiplizieren
$\Rightarrow 21 + 15y = 2 - 4y \quad \Rightarrow \quad 19y = -19 \quad \Rightarrow \quad y = -1$
y = -1 in eine der Ausgangsgleichung eingesetzt ergibt x = 1
Also: L = {(1; -1)}

Die Einsetzmethode

$\mathrm{I)}\ 2x - 5y = 7 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7+5y}{2}$

In II) eingesetzt: $3 \cdot \frac{7+5y}{2} + 2y = 1$

$3 \cdot (7 + 5y) + 4y = 2 \quad \Rightarrow \quad 21 + 15y + 4y = 2 \quad \Rightarrow \quad 19y = -19 \quad \Rightarrow \quad y = -1$
y = -1 in eine der Ausgangsgleichung eingesetzt ergibt x = 1
Also: L = {(1; -1)}

Die Additionsmethode

$\mathrm{I)}\ 2x - 5y = 7$ Die ganze Gleichung mit 3 multiplizieren
$\mathrm{II)}\ 3x + 2y = 1$ Die ganze Gleichung mit (-2) multiplizieren

$\mathrm{I)}\ 6x - 15y = 21$
$\mathrm{II)}\ -6x - 4y = -2$

Beide Gleichungen addiert ergibt: $-19y = 19 \quad \Rightarrow \quad y = -1$
y = -1 in eine der Ausgangsgleichung eingesetzt ergibt x = 1
Also: L = {(1; -1)}

4.9. Gleichung mit mehreren Unbekannten (Additionsmethode)

	Spalte A			Spalte B			Spalte C
I)	$x + y + z = 15$	$\Rightarrow$	**I)**	$x + y + z = 15$	$\Rightarrow$	**I)**	$x + y + z = 15$
II)	$3x - 4y + 5z = 24$		**II)**			**II)**	
III)	$8x + 2y - 3z = 13$		**III)**			**III)**	

1. Schritt: **A I) mit (-3) multiplizieren ⇒ A I)***
A I)* + **A II)** miteinander addieren und in **B2** und **C2** einsetzen

	Spalte A			Spalte B			Spalte C
I)	$x + y + z = 15$		**I)**	$x + y + z = 15$		**I)**	$x + y + z = 15$
II)	$3x - 4y + 5z = 24$		**II)**	$-7y + 2z = -21$	$\Rightarrow$	**II)**	$-7y + 2z = -21$
III)	$8x + 2y - 3z = 13$		**III)**			**III)**	

2. Schritt: **A I) mit (-8) multiplizieren ⇒ A I)***
A I)* + **A III)** miteinander addieren und in **B3** einsetzen

	Spalte A		Spalte B		Spalte C
I)	$x + y + z = 15$	**I)**	$x + y + z = 15$	**I)**	$x + y + z = 15$
II)	$3x - 4y + 5z = 24$	**II)**	$-7y + 2z = -21$	**II)**	$-7y + 2z = -21$
III)	$8x + 2y - 3z = 13$	**III)**	$-6y - 11z = -107$	**III)**	

3. Schritt: **B II) mit (-6) multiplizieren ⇒ B II)***
B III) mit 7 multiplizieren ⇒ B III)*
B II)* + **B III)*** miteinander addieren und in **C3** einsetzen

	Spalte A		Spalte B		Spalte C
I)	$x + y + z = 15$	**I)**	$x + y + z = 15$	**I)**	$x + y + z = 15$
II)	$3x - 4y + 5z = 24$	**II)**	$-7y + 2z = -21$	**II)**	$-7y + 2z = -21$
III)	$8x + 2y - 3z = 13$	**III)**	$-6y - 11z = -107$	**III)**	$-89z = -623$

4. Schritt: Aus C III) folgt **z**, in C II) eingesetzt ergibt **y**, in C I) eingesetzt ergibt **x**

$-89z = -623 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{z = 7}}$

$-7y + 2z = -21 \quad \Rightarrow \quad -7y + 2 \cdot 7 = -21 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = 5}}$

$x + y + z = 15 \quad \Rightarrow \quad x + 5 + 7 = 15 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 3}}$

	Spalte A		Spalte B		Spalte C
I)	$x + y + z = 15$	**I)**	$x + y + z = 15$	**I)**	$x + y + z = 15$
II)	$3x - 4y + 5z = 24$	**II)**	$-7y + 2z = -21$	**II)**	$-7y + 2z = -21$
III)	$8x + 2y - 3z = 13$	**III)**	$-6y - 11z = -107$	**III)**	$-89z = -623$

$\underline{\underline{L = \{(3;\ 5;\ 7)\}}}$

4.10. Die wichtigsten Spezialfälle

Im „Normalfall" hat ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen genau eine Lösung. Ist die Anzahl der Gleichungen und Variablen nicht gleich, so hat das Gleichungssystem keine oder unendlich viele Lösungen.

I) Falls es **mehr Gleichungen als Unbekannte** hat, gibt es in der Regel **keine Lösung**. Man sagt das Gleichungssystem ist überbestimmt.

II) Falls es **weniger Gleichungen als Unbekannte** hat, gibt es in der Regel **unendlich viele Lösungen**.

4.11. Nichtlineare Gleichungssysteme (Substitutionsmethode)

Musterbeispiel 1: $D = D_x \times D_y = \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (Lösung mittels Substitution)

$\text{I) } 1/x + 1/y = 17$

$\text{II) } 1/x - 1/y = 1$

Substitution: r = 1/x; s = 1/y

Das Gleichungssystem neu schreiben und lösen:

$\text{I) } r + s = 17$

$\text{II) } r - s = 1$

Lösung: r = 9 und s = 8

Rücksubstitution (x und y auflösen): x = 1/r = 1/9; y = 1/s = 1/8 Also: $\underline{\underline{L = \{(1/9; 1/8)\}}}$

Musterbeispiel 2: $D = D_x \times D_y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (Lösung durch Einsetzen)

$\text{I) } x + y + \frac{x+y}{x-y} = 45$

$\text{II) } x + y - \frac{x+y}{x-y} = 15$

Beide Gleichungen zusammenzählen ergibt: 2x + 2y = 60 oder x + y = 30.
x + y = 30 in eine der beiden Gleichungen einsetzen:
In I) eingesetzt: I) $30 + \frac{30}{x-y} = 45 \;\; \Rightarrow \;\; x - y = 2$

Nun haben wir ein neues, einfaches Gleichungssystem erhalten:

$\text{Ia) } x + y = 30$

$\text{IIa) } x - y = 2$

Die Lösung lautet nun x = 16, y = 14 Also: $\underline{\underline{L = \{(16; 14)\}}}$

Musterbeispiel 3: $D = D_x \times D_y = \mathbb{R}\backslash\{-4\} \times \mathbb{R}\backslash\{-1/2\}$ (Lösung mittels Substitution)

$\text{I) } \frac{8}{x+4} - \frac{9}{2y+1} = \frac{11}{15}$

$\text{II) } \frac{6}{x+4} - \frac{5}{2y+1} = \frac{2}{3}$

Substitution: $r = \frac{1}{x+4}; s = \frac{1}{2y+1}$

$\text{Ia) } 8r - 9s = \frac{11}{15}$ ⇒ mit 3 multiplizieren ⇒ $\text{Ib) } 24r - 27s = \frac{33}{15}$

$\text{IIa) } 6r - 5s = \frac{2}{3}$ ⇒ mit (-4) multiplizieren ⇒ $\text{IIb) } -24r + 20s = -\frac{8}{3}$

Beide Gleichungen zusammenzählen ergibt: $-7s = -\frac{7}{15} \;\; \Rightarrow \;\; s = \frac{1}{15}$

In Ia) eingesetzt: Ic) $8r - \frac{9}{15} = \frac{11}{15} \;\; \Rightarrow \;\; r = \frac{1}{6}$

Rücksubstitution: $r = \frac{1}{6} = \frac{1}{x+4} \Rightarrow x = 2; \;\; s = \frac{1}{15} = \frac{1}{2y+1} \Rightarrow y = 7$

Die Lösung lautet nun x = 2, y = 7 Also: $\underline{\underline{L = \{(2; 7)\}}}$

4.12. Quadratische Gleichungen

Allgemeines Vorgehen zum Lösen einer quadratischen Gleichung:

I) Die quadratische Gleichung auf die Form $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ bringen.

II) Mit der Lösungsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ die Lösungen bestimmen.

@TI30: (-B ± √(B² - 4AC)) / (2A)

Diese Lösungsformel wird umgangssprachlich als „Mitternachtsformel" bezeichnet, weil ein Schüler sie auswendig kennen sollte, selbst wenn man ihn um Mitternacht weckt. ☺

Ist $b = 0$, so hat man eine sogenannte reinquadratische Gleichung.
Ist $b \neq 0$, so spricht man von gemischtquadratischen Gleichungen.

Eine quadratische Gleichung kann 0, 1 oder 2 Lösungen haben.

Anz. Lösungen	Bedingung allgemeine Form	allgemeine Bedingung
0	$b^2 - 4ac < 0$	Wert unter der Wurzel ist < 0
1	$b^2 - 4ac = 0$	Wert unter der Wurzel ist = 0
2	$b^2 - 4ac > 0$	Wert unter der Wurzel ist > 0

Der Wert unter der Wurzel ($b^2 - 4ac$) heisst **Diskriminante D**
der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

Eine quadratische Gleichung hat

I) **keine Lösung**, falls die Diskriminante **D < 0** ist.

II) **eine Lösung**, falls die Diskriminante **D = 0** ist.

III) **zwei Lösungen**, falls die Diskriminante **D > 0** ist.

4.13. Quadratische Gleichungen mit Formvariablen

Beispiel 1: $2x^2 + 5dx + 3d^2 = 0$ D=R

Es gilt nun: $a = 2$ $b = 5d$ $c = 3d^2$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5d \pm \sqrt{25d^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3d^2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5d \pm \sqrt{d^2}}{4} = \frac{-5d \pm |d|}{4} = \frac{-5d \pm d^*}{4}$$

*Da wir beide Varianten (+/-) ausrechnen müssen, dürfen wir das Betragszeichen weglassen.

$x_1 = -d$, $x_2 = -1{,}5d$

L = {-d; -1,5d}

Beispiel 2: $x^2 - 2ex + e^2 - d^2 = 0$ D=R

Es gilt nun: $a = 1$ $b = -2e$ $c = e^2 - d^2$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2e) \pm \sqrt{(-2e)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (e^2 - d^2)}}{2 \cdot 1} = \frac{2e \pm \sqrt{4e^2 - 4e^2 + 4d^2}}{2}$$
$$= \frac{2e \pm \sqrt{4d^2}}{2} = \frac{2e \pm 2|d|}{2} = \frac{2e \pm 2d}{2}$$

$x_1 = e + d$, $x_2 = e - d$

L = {e+d; e-d}

4.14. Quadratische Gleichungen mit Wurzelziehen

Man darf ohne Bedenken auf beiden Seiten des Gleichheitszeichen die Wurzel ziehen, aber man muss es richtig machen! (Siehe 4.2 Rechenregel)

Musterbeispiel: $x^2 = 36$

1. Lösungsart:

x^2	$= 36$	D=R
$x^2 - 36$	$= 0$	
$(x+6)(x-6)$	$= 0$	| In Faktoren zerlegt
x_1	$= -6$	| Das Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist.
x_2	$= 6$	

L = {-6; 6}

2. Lösungsart:

x^2	$= 36$	D=R
$\|x\|$	$= \sqrt{36}$	| Auf beiden Seiten Wurzelziehen*
$\|x\|$	$= 6$	
x_1	$= -6$	| $\|x\| = 6$ hat zwei Lösungen
x_2	$= 6$	

L = {-6; 6}

(*) Wichtig ist, dass $\sqrt{\mathbf{x}^2} = |\mathbf{x}|$

4.15. Quadratische Gleichungen mit Substitution

Musterbeispiel:

$$\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^2 - 6\left(\frac{x+5}{x-1}\right) + 8 = 0$$ D = R\{1}

Man setzt nun: $z = \frac{x+5}{x-1}$

$z^2 - 6z + 8 = 0$ | Neue Gleichung

$(z - 2)(z - 4) = 0$

$z_1 = 2$ | Die Lösungen für die ersetzte Gleichung

$z_2 = 4$

Lösung für z_1:

$\frac{x+5}{x-1} = 2$

$x + 5 = 2x - 2$

$x_1 = 7$

Lösung für z_2:

$\frac{x+5}{x-1} = 4$

$x + 5 = 4x - 4$

$x_2 = 3$

L = {3; 7}

4.16. Biquadratische Gleichungen

Ein Spezialfall von Substitution sind die biquadratischen Gleichungen. Das sind Gleichungen wo x^4 und x^2, aber kein x^3 und x vorkommen.

Unter einer **biquadratischen Gleichung** versteht man eine Gleichung der Form: $\mathbf{ax^4 + bx^2 + c = 0}$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$

Bemerkung: Eine Gleichung die x^4 enthält, kann im Maximum 4 Lösungen haben.

Musterbeispiel:

$x^4 + 8x^2 - 48 = 0$ D = R

Man setzt nun: $z = x^2$

$z^2 + 8z - 48 = 0$ | Neue Gleichung

$(z - 4)(z + 12) = 0$

$z_1 = 4$ | Die Lösungen für die ersetzte Gleichung

$z_2 = -12$

Lösung für z_1:

$x^2 = 4$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

Lösung für z_2:

$x^2 = -12$

Diese Gleichung hat keine Lösungen, also existiert x_3 und x_4 gar nicht.

L = {-2; 2}

4.17. Wurzelgleichungen

Vorgehen:

I) **Definitionsbereich angeben**
(optional, da ja am Schluss so oder so die Probe gemacht werden muss)

II) **Wurzeln separieren**

III) **Quadrieren**

IV) **Probe machen**
(Quadrieren ist ja keine Äquivalenzumformung)

V) **Lösungsmenge angeben**

Musterbeispiel 1:

$\sqrt{x+4}-4=0$ D = [-4; ∞[

$\sqrt{x+4}-4$	=	0	| + 4
$\sqrt{x+4}$	=	4	| Quadrieren
(x + 4)	=	16	| - 4
x	=	12	

Probe durch Einsetzen:
$x = 12$ eingesetzt: $\sqrt{12+4}-4=\sqrt{16}-4=4-4=0$ ✓

<u>L = {12}</u>

Musterbeispiel 2:

$\sqrt{x+4}+4=0$ D = [-4; ∞[

$\sqrt{x+4}+4$	=	0	| - 4
$\sqrt{x+4}$	=	-4	| Quadrieren
(x + 4)	=	16	| - 4
x	=	12	

Probe durch Einsetzen:
$x = 12$ eingesetzt: $\sqrt{12+4}+4=\sqrt{16}+4=4+4=8\neq 0$

<u>L = {}</u>

Zusammenfassung der Lösungsstrategie:

- <u>1 Wurzel in der Gleichung</u>:
Wurzel separieren und quadrieren
- <u>2 einzelne Wurzeln ohne weitere additive Terme</u>:
Wurzeln je auf eine Seite bringen und quadrieren
- <u>2 Wurzeln und ein weiterer Term oder 3 Wurzeln</u>:
Eine Wurzel separieren, quadrieren und vereinfachen, danach wiederum Wurzel separieren und quadrieren.

Musterbeispiel 3: Wie lautet die Lösungsmenge der Gleichung $\sqrt{x-4} - 2\sqrt{x+5} = 0$?

Zuerst berechnen wir den Definitionsbereich der einzelnen Wurzeln. Der Durchschnitt dieser Definitionsbereiche ist der Definitionsbereich der Gleichung.

Der Definitionsbereich D_1 der Wurzel $\sqrt{x-4}$ ist [4; ∞[
Der Definitionsbereich D_2 der Wurzel $\sqrt{x+5}$ ist [-5; ∞[
Der Definitionsbereich D der Gleichung ist $D_1 \cap D_2$ = [4; ∞[

$$\begin{aligned} \sqrt{x-4} - 2\sqrt{x+5} &= 0 && \mid +2\sqrt{x+5} && D = [4; \infty[\\ \sqrt{x-4} &= 2\sqrt{x+5} && \mid \text{Quadrieren} \\ x - 4 &= 2^2(x+5) \\ x - 4 &= 4(x+5) \\ x - 4 &= 4x + 20 \\ 3x &= -24 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

L = {}

Da x = -8 nicht im Definitionsbereich liegt ist die Probe durch Einsetzen nicht nötig.

Musterbeispiel 4: Wie lautet die Lösungsmenge der Gleichung $\sqrt{x-4} - \sqrt{x+5} + 1 = 0$?

$$\begin{aligned} \sqrt{x-4} - \sqrt{x+5} + 1 &= 0 && \mid +\sqrt{x+5} && D = [4; \infty[\\ \sqrt{x-4} + 1 &= \sqrt{x+5} && \mid \text{Quadrieren} \\ \left(\sqrt{x-4} + 1\right)^2 &= \left(\sqrt{x+5}\right)^2 && \mid \text{Binom ausrechnen} \\ x - 4 + 2\sqrt{x-4} + 1 &= x + 5 && \mid \text{Zusammenfassen} \\ 2\sqrt{x-4} &= 8 && \mid \text{Vereinfachen} \\ \sqrt{x-4} &= 4 && \mid \text{Quadrieren} \\ x - 4 &= 16 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Probe durch Einsetzen:

$x = 20$ eingesetzt: $\sqrt{20-4} - \sqrt{20+5} + 1 = \sqrt{16} - \sqrt{25} + 1 = 4 - 5 + 1 = 0$ ✓

L = {20}

Musterbeispiel 5: Wie lautet die Lösungsmenge der Gleichung $\sqrt{2x - 1 + \sqrt{8x+9}} - 4 = 0$?

In diesem Fall ist die Berechnung des Definitionsbereiches viel zu kompliziert. Darum verzichten wir darauf und berechnen deshalb nur die „Lösungen“ und machen die Probe.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x - 1 + \sqrt{8x+9}} - 4 &= 0 && \mid +4 && D = \mathbb{R} \\ \sqrt{2x - 1 + \sqrt{8x+9}} &= 4 && \mid \text{Quadrieren} \\ 2x - 1 + \sqrt{8x+9} &= 16 && \mid \text{Wurzel separieren} \\ \sqrt{8x+9} &= 17 - 2x && \mid \text{Quadrieren} \\ 8x + 9 &= 289 - 68x + 4x^2 && \mid \text{Zusammenfassen} \\ 4x^2 - 76x + 280 &= 0 && \mid \text{Quadratische Gleichung lösen} \\ x_1 &= 5 \\ x_2 &= 14 \end{aligned}$$

Probe durch Einsetzen:

$x_1 = 5: \sqrt{9 + \sqrt{49}} - 4 = \sqrt{9+7} - 4 = \sqrt{16} - 4 = 4 - 4 = 0$ ✓

$x_2 = 14: \sqrt{27 + \sqrt{121}} - 4 = \sqrt{27+11} - 4 = \sqrt{38} - 4 \neq 0$

L = {5}

4.18. Potenzgleichungen

Gleichungen, in denen die unabhängige Variable in der Basis steht, heissen **Potenzgleichungen**.

Vorgehen:

I) **Gleichung auf die Form x^n = a bringen, ggf. ist ein Umformen notwendig**

II) **Definitionsbereich bestimmen**
(falls möglich, andernfalls am Schluss die Probe machen)

III) **Gleichung durch auf beiden Seiten der n-te Wurzel ziehen lösen**
$\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{a} \;\Rightarrow\; x = \sqrt[n]{a}$

IV) **Lösungsmenge angeben**

Das Detailprinzip:

1) Gegeben ist nach eventuellem vorherigem Umformen die Gleichung

$$\mathbf{x^n = a} \qquad \text{resp.} \qquad \mathbf{x^{-n} = b \;\Leftrightarrow\; x^n = \frac{1}{b} = a}$$

die nach x aufzulösen ist.

2) Bestimmen des Definitionsbereiches (abhängig von n)

I) $n \in \mathbb{N}$, dann ist **DB = R** resp. **DB = R\{0}**

II) $n > 0$ und $n \notin \mathbb{N}$, dann ist **DB = R_+** resp. **DB = R^*_+ = R_+\{0}**

3) Der Auflösungsschritt ist auf beiden Seiten die n-te Wurzel zu ziehen:
$\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{a} \;\Rightarrow\; x = \sqrt[n]{a}$

4) Formulieren der Lösungsmenge für $x^n = a$. Als Resultat kommt je nachdem wie a und n gewählt worden sind, genau eine der folgenden Lösungsmengen vor:

I) $L_1 = \{\sqrt[n]{a}\}$ falls $a \geq 0$ und **n > 0 und n nicht gerade**

II) $L_2 = \{-(\sqrt[n]{a});\ \sqrt[n]{a}\}$ falls $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, n gerade

III) $L_3 = \{\,\}$ falls $a < 0$ und **n > 0 und n nicht ungerade**

IV) $L_4 = \{-(\sqrt[n]{-a})\} = \left\{-\left(\sqrt[n]{|a|}\right)\right\}$ falls $a < 0$ und $n \in \mathbb{N}$, n ungerade

4b) Formulieren der Lösungsmenge für $x^{-n} = b \;\Leftrightarrow\; x^n = \frac{1}{b} = a$. Als Resultat kommt je nachdem wie a und n gewählt worden sind, genau eine der folgenden Lösungsmengen vor:

I) $L_1 = \{\sqrt[n]{a}\} = \{\sqrt[n]{1/b}\}$ falls $a \geq 0$ und **n > 0 und n nicht gerade**

II) $L_2 = \{-(\sqrt[n]{a});\ \sqrt[n]{a}\}$ falls $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, n gerade

III) $L_3 = \{\,\}$ falls $a < 0$ und **n > 0 und n nicht ungerade**

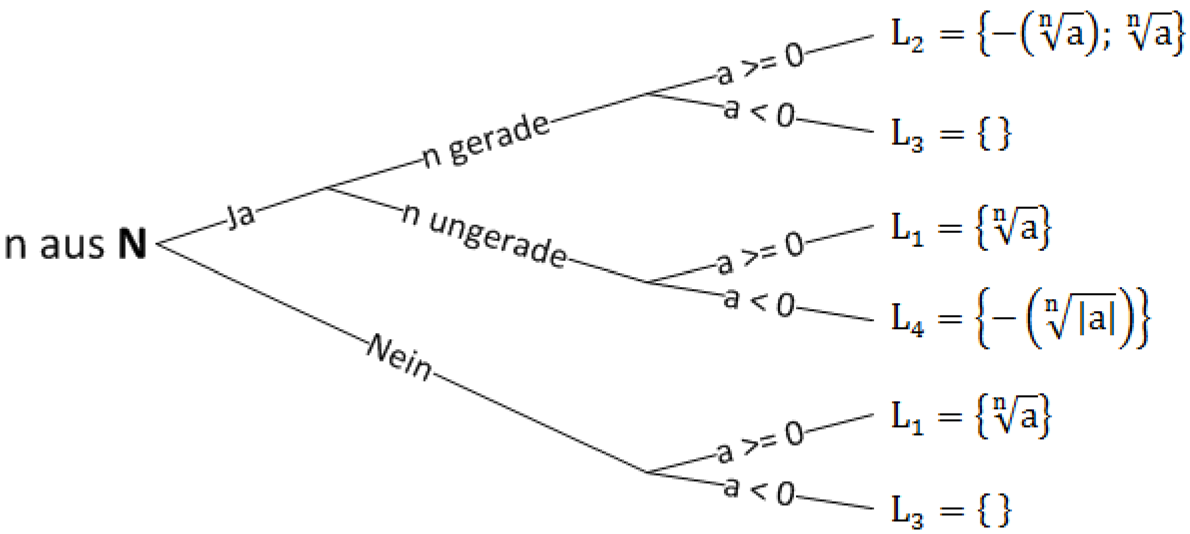
IV) $L_4 = \left\{-\left(\sqrt[n]{|a|}\right)\right\}$ falls $a < 0$ und $n \in \mathbb{N}$, n ungerade

Lösungsmengen:

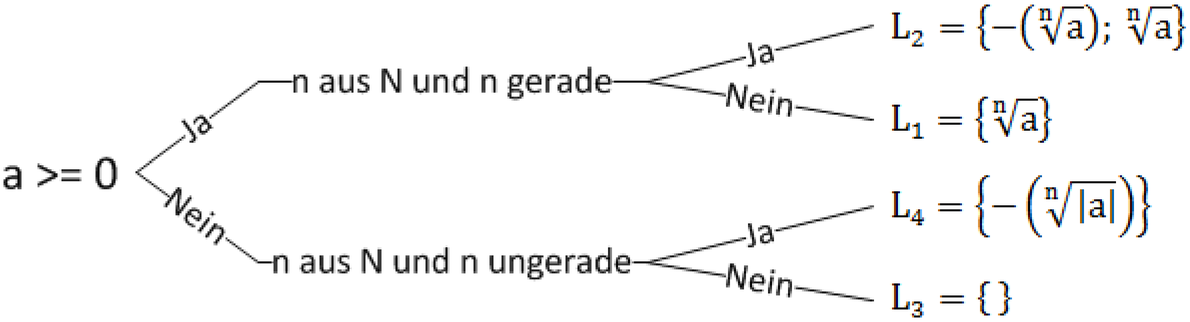
$\mathbf{L_1} = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}$,	falls a ≥ 0 und **n > 0 und n nicht gerade**
$\mathbf{L_2} = \left\{-\left(\sqrt[n]{a}\right);\ \sqrt[n]{a}\right\}$,	falls a ≥ 0 und $n \in \mathbb{N}$, n gerade
$\mathbf{L_3} = \{\ \}$,	falls a < 0 und **n > 0 und n nicht ungerade**
$\mathbf{L_4} = \left\{-\left(\sqrt[n]{\lvert a\rvert}\right)\right\}$,	falls a < 0 und $n \in \mathbb{N}$, n ungerade

Gegeben ist nach eventuellem vorherigem Umformen die Gleichung: $\mathbf{x^n = a}$

Entscheidungsdiagramm mit Potenz n als erste Entscheidung:



Entscheidungsdiagramm mit a als erste Entscheidung:



4.19. Exponentialgleichungen

Gleichungen, in denen die unabhängige Variable im Exponent steht, heissen **Exponentialgleichungen**.

Bei Exponentialgleichungen muss zur Lösungsfindung in der Regel logarithmiert werden. In einfacheren Fällen kann – gleiche Basis vorausgesetzt – ein Exponentenvergleich gemacht werden.

Musterbeispiel 1: Exponentenvergleich

$$\begin{aligned} 8^x &= 2 && \text{| 8 als 2-er Potenz schreiben} \\ (2^3)^x &= 2 && \text{| gleiche Basis} \\ 2^{3x} &= 2^1 && \text{| Exponentenvergleich} \\ 3x &= 1 \\ x &= 1/3 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{L = \{1/3\}}}$

Die Gleichung kann natürlich auch mit der Definition des Logarithmus gelöst werden.

$$8^x = 2 \iff x = \log_8 2 = \frac{\lg 2}{\lg 8} = \frac{1}{3}$$

Musterbeispiel 2: Lösen mittels Logarithmieren

$$\begin{aligned} 2^x &= 3^{x-1} && \text{| Logarithmieren} \\ \lg 2^x &= \lg 3^{x-1} && \text{| Logarithmengesetze anwenden} \\ x \cdot \lg 2 &= (x-1) \cdot \lg 3 && \text{| Ausrechnen} \\ x \cdot \lg 2 &= x \cdot \lg 3 - \lg 3 && \text{| Alle Terme mit x auf eine Seite} \\ \lg 3 &= x \cdot \lg 3 - x \cdot \lg 2 && \text{| „x" ausklammern} \\ \lg 3 &= x \cdot (\lg 3 - \lg 2) && \text{| auf x lösen} \\ x &= \frac{\lg 3}{\lg 3 - \lg 2} \\ x &= 2.71 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{L = \{2.71\}}}$

Musterbeispiel 3: Quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} 4 \cdot e^{2x-2} &= 3 - 6 \cdot e^{x-1} && | \\ 4 \cdot \frac{e^{2x}}{e^2} &= 3 - 6 \cdot \frac{e^x}{e} && | \\ \frac{4}{e^2} \cdot (e^x)^2 &= 3 - \frac{6}{e} \cdot e^x && | \\ \frac{4}{e^2} \cdot (e^x)^2 + \frac{6}{e} \cdot e^x - 3 &= 0 && \text{| Subst. } z = e^x \\ \frac{4}{e^2} \cdot z^2 + \frac{6}{e} \cdot z - 3 &= 0 && \text{| Quad. Gl. } z_1 = -5.153,\ z_2 = 1.07547 \end{aligned}$$

$x = \ln z$ $\qquad \ln 1.07547 = 0.07276$ $\qquad$ | Die zweite Lösung ist nicht möglich,
| da $z_1 = -5.153 < 0$ ist

$\underline{\underline{L = \{0.07276\}}}$

4.20. Logarithmusgleichungen

Gleichungen, in denen die unabhängige Variable im Numerus steht, heissen **Logarithmengleichungen**.

Die erhaltenen Lösungen müssen eingesetzt werden, damit keine Logarithmen aus Null oder negativen Zahlen gezogen wird.

Bei den Logarithmusgleichungen ist es wichtig auf den Definitionsbereich zu achten; der Numerus muss ja bekanntlich positiv sein. Oft ist das Bestimmen des Definitionsbereichs zeitaufwendig. In diesem Fall müssen die Lösungen eingesetzt werden, um zu verifizieren, dass kein Numerus Null oder negativ ist.

Musterbeispiel 1: Die folgende Gleichung wird auf 3 verschiedene Varianten gelöst.
lg(x + 1) = lg(-x)

Variante 1: Vergleich der Numeri

(x+ 1)	=	(-x)	|
x	=	-1/2	|

L = {-1/2}

Variante 2: „10 hoch“ (Verwendung der Regel $a^{\log_a b} = b$)

$10^{\lg(x+1)}$	=	$10^{\lg(-x)}$	|
(x + 1)	=	(-x)	| „10 hoch“ und log heben sich auf
x	=	-1/2	|

L = {-1/2}

Variante 3: Alles auf eine Seite bringen, dann die Logarithmengesetze verwenden

lg(x + 1) – lg(-x)	=	0	|
$\lg\left(\frac{x+1}{-x}\right)$	=	0	| „10 hoch“
$\frac{x+1}{-x}$	=	1	| „10 hoch“ und log heben sich auf
(x + 1)	=	(-x)	|
x	=	-1/2	|

L = {-1/2}

Musterbeispiel 2: $\lg(x - 3) - \lg(2x + 7) = \lg(3x + 1) - \lg(x - 5)$

Den Definitionsbereich bestimmen wir nicht. Die erhaltenen Lösungen müssen aber eingesetzt werden, damit keine Logarithmen aus Null oder negativen Zahlen gezogen werden.

$$\lg\left(\frac{x-3}{2x+7}\right) = \lg\left(\frac{3x+1}{x-5}\right) \quad | \text{ „10 hoch", resp. Vergleich der Numeri}$$

$$\frac{x-3}{2x+7} = \frac{3x+1}{x-5} \quad | \text{ Bruchgl. lösen}$$

$$(x - 3) \cdot (x - 5) = (3x + 1) \cdot (2x + 7) \quad |$$

$$x^2 - 8x + 15 = 6x^2 + 23x + 7 \quad |$$

$$5x^2 + 31x - 8 = 0 \quad | \text{ Quadr. Gl. lösen}$$

$$x_1 = 0.248 \quad | \text{ Wert nicht in D}$$

$$x_2 = -6.448 \quad | \text{ Wert nicht in D}$$

$\underline{\underline{L = \{ \}}}$

Musterbeispiel 3: $\ln(x - 1) + \ln(x - 2) = 3$

$$\ln[(x - 1) \cdot (x - 2)] = 3 \quad | \text{ „e hoch"}$$

$$(x - 1) \cdot (x - 2) = e^3 \quad |$$

$$x^2 - 3x + 2 - e^3 = 0 \quad | \text{ Quad. Gl. lösen}$$

$$x_1 = 6.01 \quad |$$

$$x_2 = -3.01 \quad | \text{ Wert nicht in D}$$

$\underline{\underline{L = \{6.011\}}}$

Musterbeispiel 4: $x^{\lg x} = \frac{x^3}{100}$

$$100 \cdot x^{\lg x} = x^3 \quad | \text{ Logarithmieren} \qquad \mathbf{D = R_+}$$

$$\lg 100 + \lg x \cdot \lg x = 3 \cdot \lg x \quad | \text{ Vereinfachen}$$

$$2 + (\lg x)^2 = 3 \cdot \lg x \quad | \text{ Subst. } \lg(x) = z$$

$$2 + z^2 = 3 \cdot z \quad |$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \quad | \text{ Quadr. Gl. lösen}$$

$$(z - 1)(z - 2) = 0$$

$$z_1 = 1;\ z_2 = 2;$$

$$z_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 10 \quad | \text{ Rücksubst. } x = 10^z$$

$$z_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 100 \quad | \text{ Rücksubst. } x = 10^z$$

$\underline{\underline{L = \{10; 100\}}}$

4.21. Verschiedene Aufgaben

Aufgabe 1:Wurzelgleichung (mit x dividieren ⇒ überprüfen ob 0 eine Lösung ist!)

Gegeben ist die Wurzelgleichung $\sqrt{1+x\sqrt{1+8x}} = x+1$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge

$\sqrt{1+x\sqrt{1+8x}}$	=	$x + 1$	| Quadrieren D=R
$1+x\sqrt{1+8x}$	=	$x^2 + 2x + 1$	| minus 1 und rechts x ausklammern
$x\sqrt{1+8x}$	=	$x(x + 2)$	| Bevor mit x dividiert wird, muss abgeklärt werden, ob x = 0 nicht eine Lösung wäre, ansonsten würde ich durch das Dividieren diese Lösung verlieren. x = 0 ist tatsächlich eine Lösung (Kontrolle durch Einsetzten in der Ausgangsgleichung)
$\sqrt{1+8x}$	=	$(x + 2)$	| Quadrieren
$1 + 8x$	=	$x^2 + 4x + 4$	| Zusammenfassen
$x^2 - 4x + 3$	=	0	| Quadratische Gleichung lösen
x_1	=	1	
x_2	=	3	

Probe durch Einsetzen: Alle 3 Lösungen in die Ausgangsgleichung eingesetzt ergeben richtige Aussagen.

L = {0; 1; 3}

Aufgabe 2:Wurzelgleichung

Gegeben ist die Wurzelgleichung $4-\sqrt{6-x}+x = 2x$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich
b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge

a) Definitionsbereich bestimmen

Bedingung: $6 - x \geq 0 \Rightarrow$ DB = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\}$

b) Lösungsmenge bestimmen

$4-\sqrt{6-x}+x$	=	$2x$	| Wurzel separieren
$4 - x$	=	$\sqrt{6-x}$	| Quadrieren
$16 - 8x + x^2$	=	$6 - x$	| Zusammenfassen
$x^2 - 7x + 10$	=	0	
$(x - 2)(x - 5)$	=	0	
x_1	=	2	
x_2	=	5	

Probe durch Einsetzen:

$x_1 = 2: 4-\sqrt{6-2}+2 = 4-\sqrt{4}+2 = 4-2+2 = 4 = 4$ ✓

$x_2 = 5: 4-\sqrt{6-5}+5 = 4-\sqrt{1}+5 = 4-1+5 = 8 \neq 10$

L = {2}

Aufgabe 3:Bruchgleichung

Gegeben ist die Gleichung $\frac{x-4}{x-5} = \frac{30-x^2}{x^2-5x}$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich
b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge

a) Definitionsbereich bestimmen
DB = $\mathbb{R}\backslash\{0; 5\}$

b) Lösungsmenge bestimmen

$$\frac{x-4}{x-5} = \frac{30-x^2}{x(x-5)} \quad | \text{ separieren und gleichnennrig machen: } x(x -5)$$

$$\frac{x(x-4)}{x(x-5)} = \frac{30-x^2}{x(x-5)} \quad | \text{ Vereinfachen, Ausrechnen}$$

$$x^2 - 4x = 30 - x^2 \quad | \text{ Zusammenfassen}$$

$$2x^2 - 4x - 30 = 0 \quad | \text{ mit 2 dividieren}$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \quad | \text{ Quadratische Gleichung lösen}$$

$x_1 = 5$ keine Lösung, da nicht im Definitionsbereich!
$x_2 = -3$

L = {-3}

Aufgabe 4: Diskriminante

Für welchen Wert von u hat die Gleichung $x^2 + ux + 16 = 0$ genau eine Lösung?
Bedingung: Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow u^2 - 4 \cdot 16 = 0 \Rightarrow u^2 = 64 \Rightarrow u_{1,2} = \pm 8$
Resultat: Für die Werte u = 8 und u = -8 hat die Gleichung nur genau eine Lösung.

Aufgabe 5: Textaufgabe (Quadratische Gleichung)

Eine Gesellschaft macht einen Ausflug. Die Fahrkosten von 350.- CHF für einen Reisebus werden auf alle Teilnehmer gleichmässig verteilt. Im Bus sind noch 10 Plätze frei. Wäre der Bus voll besetzt, so wäre der Fahrpreis für jeden Teilnehmer um 4.- CHF günstiger.

a) Wie viele Teilnehmer fahren mit?
b) Wie viel bezahlt jeder?

a) Variablendeklaration: x = Anzahl Teilnehmer
Gleichung: $\frac{350}{x} = \frac{350}{x+10} + 4$

$$\frac{350(x+10)}{x(x+10)} = \frac{350x}{x(x+10)} + \frac{4x(x+10)}{x(x+10)}$$

$$350x + 3500 = 350x + 4x^2 + 40x$$

$$4x^2 + 40x - 3500 = 0 \quad | \text{ Quadratische Gleichung lösen}$$

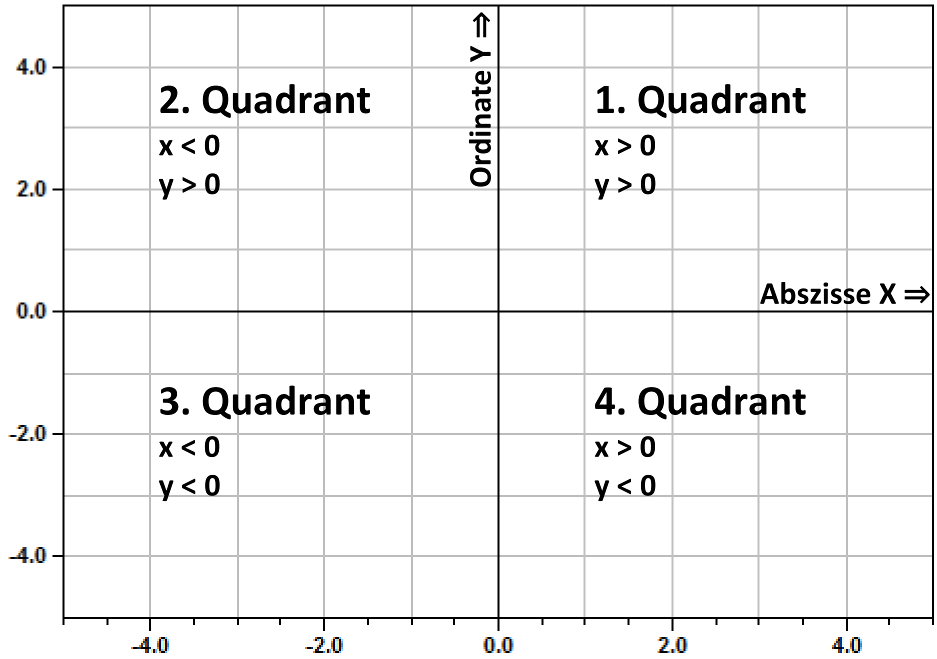
$x_1 = 25$
$x_2 = -35$ keine Lösung, da nicht im Definitionsbereich

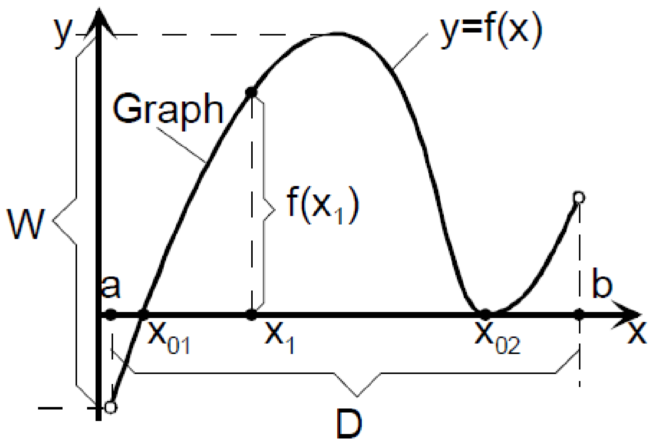
Resultat : Es hat 25 Teilnehmer im Bus.

b) 350 : 25 = 14
Resultat: Jeder bezahlt 14.- CHF für den Ausflug.

5. Funktionen

5.1. Das Koordinatensystem





x	Unabhängige Variable
x-Wert	Argument
y	Abhängige Variable
y-Wert	Funktionswert
D / DB	Definitionsbereich
W / WB	Wertebereich (vom kleinsten bis zum grössten Wert)
x-Achse	Abszisse
y-Achse	Ordinate

I) Eine **Funktion f** ist eine Zuordnung der Form **y = f(x)** so, dass es für $x \in$ **DB ⊂ R** genau **einen Wert** y = f(x) gibt.

II) Oder gleichwertig: Eine Funktion f ist eine Menge geordneter Paare (x, y), sodass jedem x genau einen Wert y zugeordnet ist.

III) Die Menge der Werte aus der die unabhängige Variable stammt, nennt man den **Definitionsbereich D oder DB**; die Menge der Werte aus der die abhängige Variable stammt heisst **Wertebereich W oder WB**

Bei einer **Funktion** darf **jedem x-Wert nur ein y-Wert** zugeordnet werden. Sobald einem x-Wert zwei y-Werte zugeordnet werden können, ist es keine Funktion mehr.

5.2. Darstellungsarten

Begriff	Darstellung mittels…	Zuordnung mittels…
1) Tabellarische Darstellung:	Wertetabelle	Angabe einzelner Paare (x; y) = (Urbild; Bild)
2) Graphische Darstellung:	Funktionskurve	Den Koordinaten der Kurvenpunkte.
3) Analytische Darstellung:	Funktionsgleichung	Rechenvorschrift

5.3. Wichtige Begriffe

- Unabhängige Variable = Die Variable, die die Inputwerte beschreibt (oft „x”)
- Abhängige Variable = Die Variable, die die Outputwerte beschreibt (oft „y”)
- Funktion = Die Zuordnung (oft „f(x)” usw., resp. „y = f(x)” usw.)
- Die Funktionskurve heisst auch Graph der Funktion.

6. Lineare Funktion

Die **lineare Funktion** ist wie folgt definiert. Dabei wird a ≠ 0 resp. m ≠ 0 vorausgesetzt.

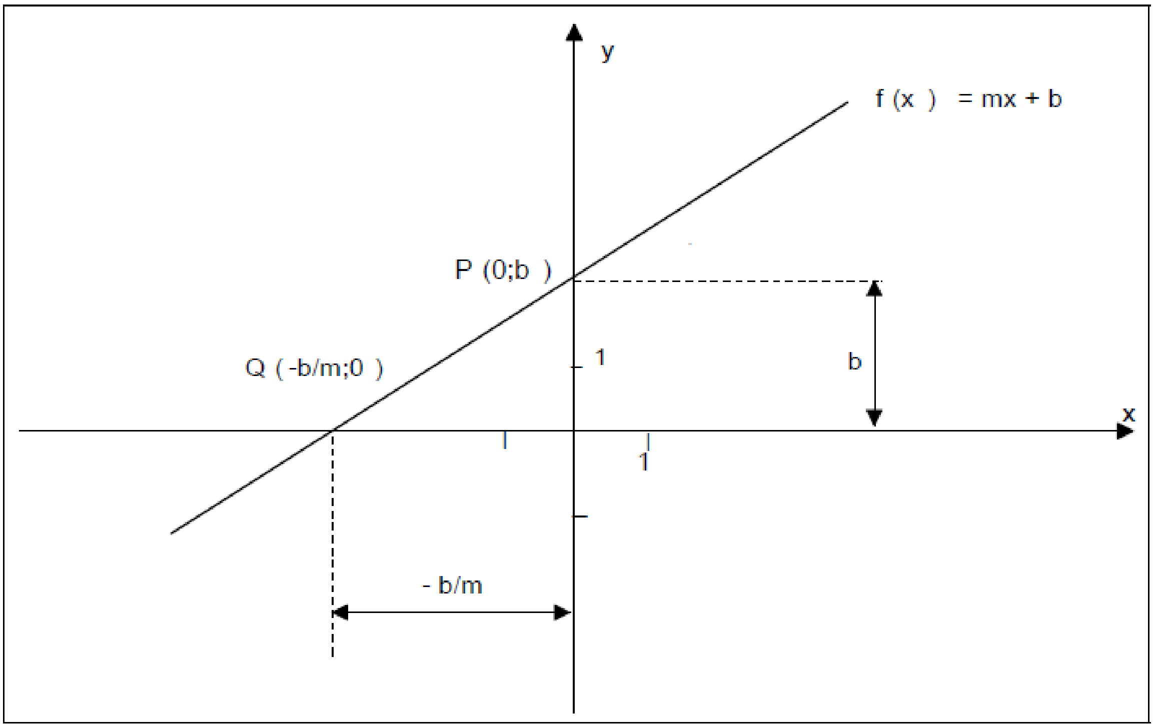
y = f(x) = ax + b
resp. f(x) = mx + b

a resp. **m** heissen **Steigung** oder **Proportionalitätsfaktor**,
b heisst **y-Achsenabschnitt** oder **konstantes Glied**.

6.1. Zusammenfassung der Eigenschaften der linearen Funktion y = f(x) = ax + b

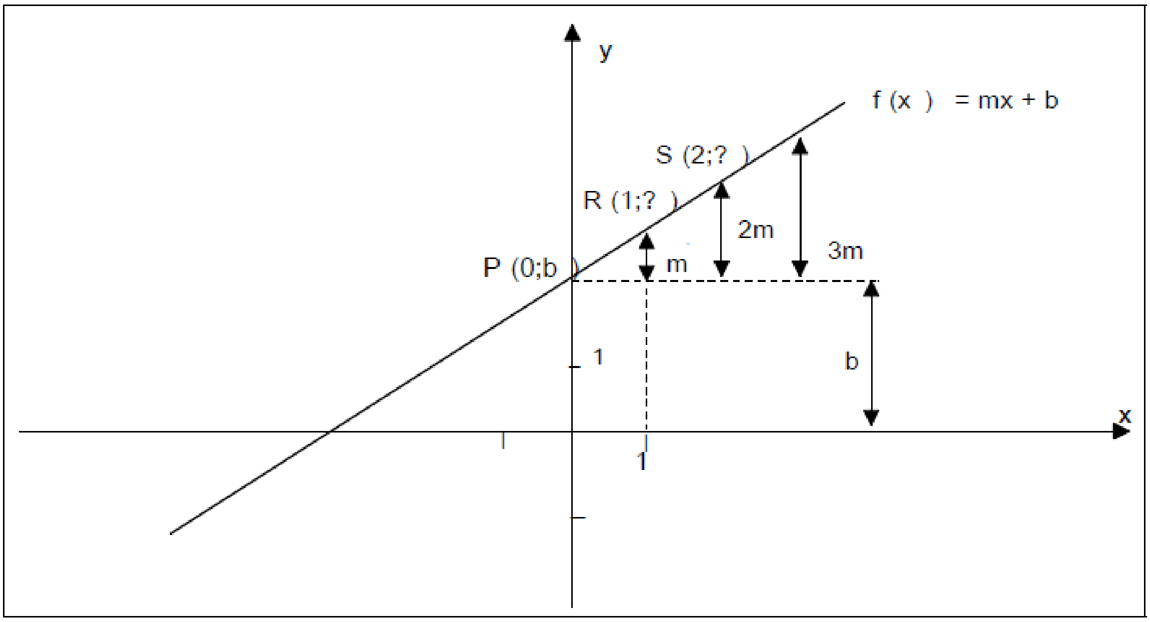
1) DB und WB:	DB = $\mathbb{R}$ WB = $\mathbb{R}$
2a) Nullstelle:	Die lineare Funktion hat eine Nullstelle, nämlich: $x = -\frac{b}{a}$, d.h. $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$
2b) Schnittpunkt mit x-Achse:	$A(x_1; y_1) = A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(x_2; y_2) = B(0; b)$
4) Umkehrfunktion:	y = f(x) = 2x + 3 ⇒ y = $f^{-1}(x)$ = h(x) = $^1/_2$x – 1.5
5) Spezialfall:	Für b = 0 geht die Funktion durch den Koordinatenursprung.

6.2. Berechnung der Schnittpunkten mit den Achsen



Schnittpunkt mit **x-Achse**: $Q\left(-\frac{b}{a};0\right)$ Schnittpunkt mit **y-Achse**: $P(0;b)$

6.3. Der Begriff der Steigung



I) Die Steigung ist **überall gleich**. D.h. es geht **überall gleich steil** hoch oder hinunter.

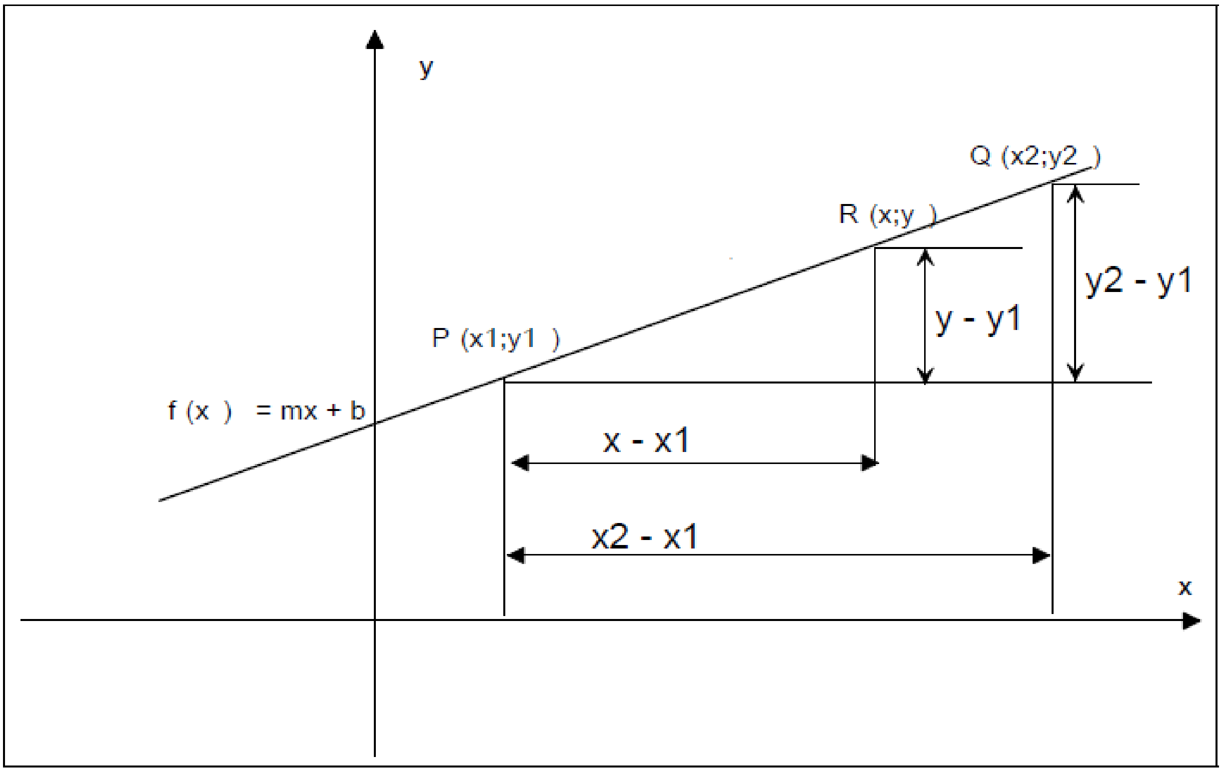
II) Die Steigung ist definiert als **Verhältnis der vertikalen Differenz (= Höhendifferenz) zur horizontalen Differenz.**

III) Da die Steigung der Gerade k**onstant** ist, kann ich als horizontale Differenz auch die **Einheitslänge 1** verwenden.

IV) Für y = mx + b ist die Steigung **m**, für y = ax +b ist die Steigung **a**.

V) Es gilt: $\begin{cases} \text{Für m} > 0 \; haben\ wir\ eine\ steigende\ Gerade. \\ \text{Für m} < 0 \; haben\ wir\ eine\ fallende\ Gerade. \end{cases}$

6.4. Zwei-Punkte-Form



Zwei-Punkte-Form: $\frac{\mathbf{y_2 - y_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}} = \frac{\mathbf{y - y_1}}{\mathbf{x - x_1}}$

Beispiel: Gesucht ist die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte P(2; 3) und Q(4; 8) geht.

Lösungsvariante 1: Beide Punkte in die 2-Punkte-Form einsetzen und kreuzweise ausmultiplizieren. Nach y auflösen.
Einsetzen in die 2-Punkte-Form: $\frac{8-3}{4-2} = \frac{y-3}{x-2} resp. \frac{5}{2} = \frac{y-3}{x-2}$
Mit kreuzweise ausmultiplizieren folgt: $5 \cdot (x-2) = 2 \cdot (y-3)$.
Nach y aufgelöst: <u>y = 2,5x -2</u>

Lösungsvariante 2: Bestimmen der Steigung. Bestimmen des y-Achsenabschnittes durch Einsetzen eines Punktes.
Steigung bestimmen: $m = \frac{8-3}{4-2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$
In Gleichung y = 2,5x + b Punkt P oder Q einsetzen:
P eingesetzt ergibt: 3 = 2,5 · 2 + b, nach b aufgelöst: b = -2
<u>y = 2,5x -2</u>

Lösungsvariante 3: Beide Punkte in die Gleichung y = mx + b einsetzen und das entstandene Gleichungssystem lösen.
P eingesetzt ergibt: I) 3 = m · 2 + b
Q eingesetzt ergibt: II) 8 = m · 4 + b
Gleichungssystem lösen: I) – II) ⇒ -2m = -5 ⇒ m = 2,5
In I) eingesetzt ergibt: 2,5 · 2 + b = 3 ⇒ b = -2
<u>y = 2,5x -2</u>

6.5. Punkt-Steigungs-Form

Punkt-Steigungs-Form: $\mathbf{m = \frac{y - y_1}{x - x_1}}$

Beispiel: Gesucht ist die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt P(6; -2) geht und die Steigung $m = -{}^1/_2$ besitzt.

Lösungsvariante 1: Einsetzen in die Punkt-Steigungs-Form: $-\frac{1}{2} = \frac{y-(-2)}{x-6}\, oder\, -\frac{1}{2}(x-6) = y+2$

Nach y aufgelöst: $\underline{\underline{y = -0{,}5x + 1}}$

Kontrolle: Natürlich muss der Punkt P die Gleichung erfüllen: P: $-2=-1/2 \cdot 6 + 1$

Lösungsvariante 2: Bestimmen des y-Achsenabschnittes durch Einsetzen eines Punktes.

In Gleichung $y = -0.5x + b$ Punkt P einsetzen: $-2 = -0.5 \cdot 6 + b \;\Rightarrow\; b = 1$

Resultat: $\underline{\underline{y = -0{,}5x + 1}}$

6.6. Schnittpunkt zweier Geraden

Beispiel: $y = f(x) = x + 6$ und $y = h(x) = -1{,}5x - 4$

Variante 1: Beide Gleichungen gleichsetzen und x ausrechnen. Danach dies einsetzen und y bestimmen.

1) $X + 6 = -1{,}5x - 4 \;\Rightarrow\; x = -4$
2) In f(x) eingesetzt ergibt dies: $f(-4) = 2$
3) Kontrolle: In h(x) eingesetzt ergibt dies: $h(-4) = 2$
4) <u>Resultat:</u> die zwei Geraden schneiden sich im Punkt S(-4; 2)

Variante 2: Gleichungssystem mit 2 Unbekannten aufstellen und dieses lösen.

1) Aufstellen des linearen Gleichungssystems:
   I) $y = x + 6$
   II) $y = -1{,}5x - 4$
2) Das Gleichungssystem lösen
3) Das Resultat formulieren und kontrollieren: S(-4; 2)

Wie viele Schnittpunkte haben 2 Geraden?

Gegeben seien 2 Geraden: g_1: $y = m_1x + b_1$ g_2: $y = m_2x + b_2$

1.Fall: $\underline{m_1 = m_2}$
⇗ $b1 \neq b2 \Rightarrow$ die 2 Geraden sind echt parallel: keinen Schnittpunkt.
⇘ $b1=b2 \Rightarrow$ die 2 Geraden fallen zusammen; unendlich viele Schnittpunkte.

2. Fall: $\underline{m_1 \neq m_2}$ $\Rightarrow$ die 2 Geraden haben genau einen Schnittpunkt.

6.7. Die Steigung zweier parallelen Geraden

Zwei Geraden g_1 und g_2 sind genau dann **parallel**, wenn sie die **gleiche Steigung** haben.
Math. Form: $g_1 \,||\, g_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$
Sie unterscheiden sich nur im Wert des y-Achsenabschnittes.

6.8. Die Steigung zweier senkrecht stehender Geraden

Zwei Geraden g_1 und g_2 stehen genau dann **senkrecht** aufeinander,
wenn das **Produkt** ihrer Steigung den **Wert -1** ergibt.
Math. Form: $g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$
resp. $g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_1 = -1/m_2$

6.9. Umkehrfunktion der linearen Funktion

1. x und y werden vertauscht.
2. x = f(y) wird nach y aufgelöst.
3. Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion wird aus dem Wertebereich der Ausgangsfunktion ermittelt.
4. Der Wertebereich der Umkehrfunktion wird aus dem Definitionsbereich der Ausgangsfunktion ermittelt.

Schritte	**Ausführung am Beispiel**
1) Vertauschen von x und y	Y = 2x +3 wird zu x = 2y + 3
2) x = f(y) nach y auflösen	Aus x = 2y + 3 folgt: $y = f^{-1}(x) = h(x) = {}^{1}/_{2}x - 1{,}5$
3) & 4) DB und WB	D = R W = R

Die Umkehrfunktion einer linearen Funktion ist wieder eine lineare Funktion.

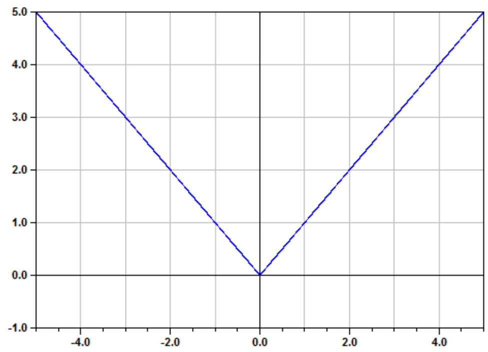
6.10. Stückweise lineare Funktionen

Im folg. setzen wir lineare Funktionen zu einer neuen Funktion zusammen. Die neue Fkt. Ist nicht mehr auf dem ganzen Def.bereich linear (d.h. man kann sie nicht mehr mit einem Lineal zeichnen).
Da sie aus linearen Funktionen zusammengesetzt ist, heisst sie stückweise linear.

Die Betragsfunktion:

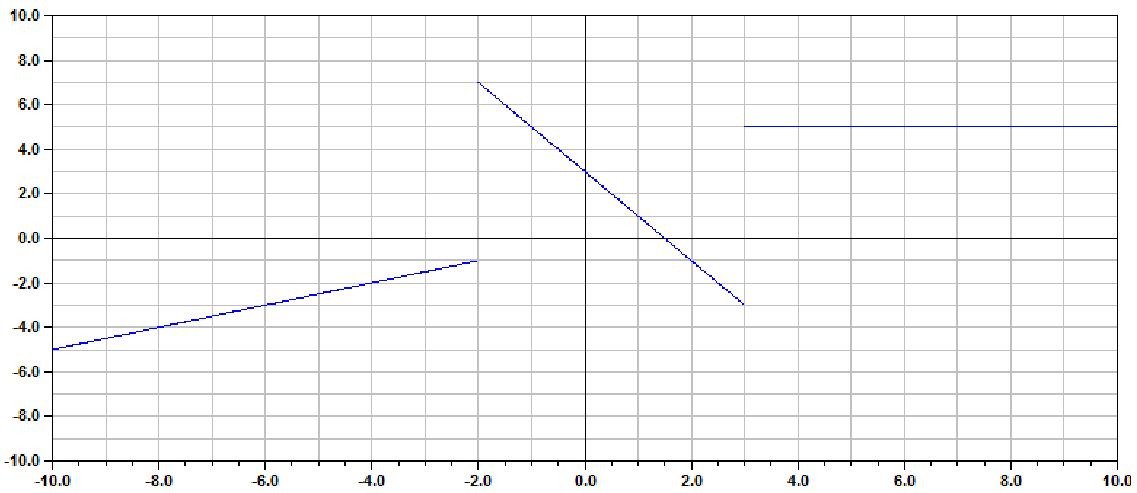
Die **Betragsfunktion** ist definiert durch:

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$$



Eine beliebig zusammengesetzte Funktion:

$$y = g(x) \begin{cases} {}^{1}/_{2}\,x \quad \text{für } x \in]-\infty; -2] \\ -2x + 3 \text{ für } x \in]-2; 3] \\ 5 \qquad \text{für } x \in]3; \infty[\end{cases}$$

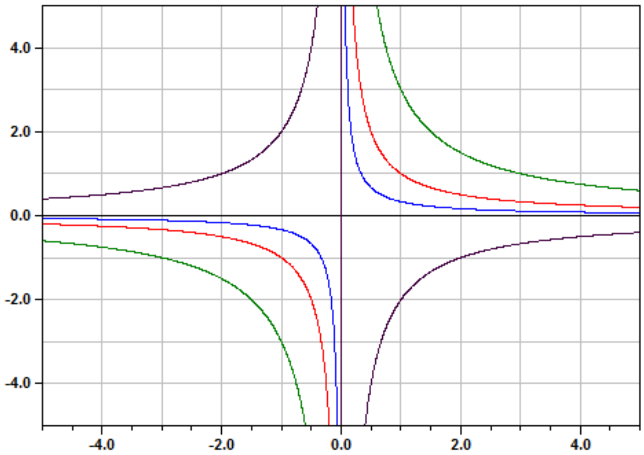


7. Die Hyperbel

Die **Hyperbel** ist wie folgt definiert. Dabei wird $c \neq 0$ vorausgesetzt.

$$y = f(x) = \frac{c}{x}$$

Die indirekte Proportionalität kann auch wie folgt beschrieben werden:
x · y = c, wobei **c** eine **Konstanten** ist.



Blau: c = 1/3 $y = f(x) = \frac{\frac{1}{3}}{x} = \frac{1}{3x}$

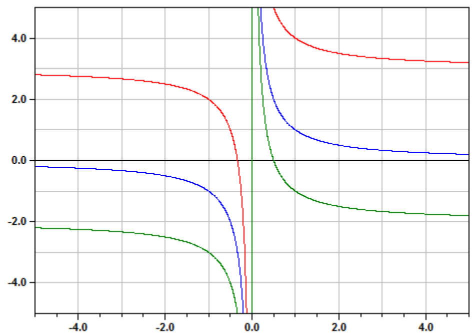
Rot: c = 1 $y = g(x) = \frac{1}{x}$

Grün: c = 3 $y = h(x) = \frac{3}{x}$

Violett: c = -2 $y = i(x) = -\frac{2}{x}$

7.1. Normalhyperbel und deren Verschiebung

Normalhyperbel: $y = f(x) = \frac{1}{x}$



Rot: $y = \frac{1}{x} + 3$

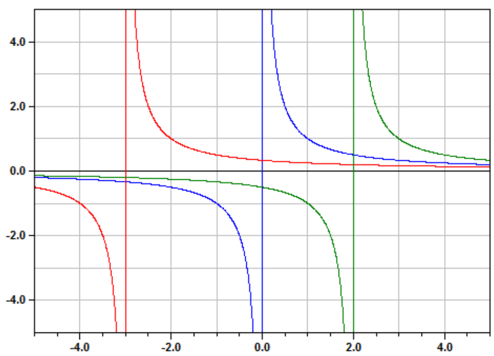
Blau: $y = \frac{1}{x}$

Grün: $y = \frac{1}{x} - 2$

Verschiebung in **y-Richtung**:

$$y = g(x) = \frac{1}{x} + e$$

e > 0: Verschiebung nach **oben**
e < 0: Verschiebung nach **unten**



Rot: $y = \frac{1}{x+3}$

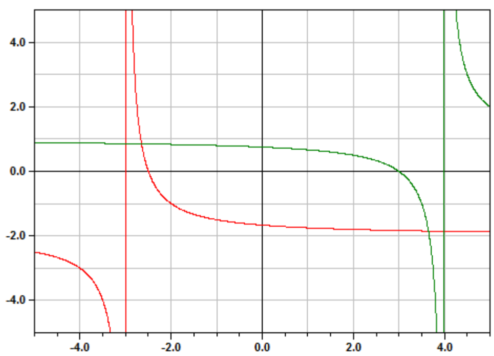
Blau: $y = \frac{1}{x}$

Grün: $y = \frac{1}{x-2}$

Verschiebung in **x-Richtung**:

$$y = g(x) = \frac{1}{x + d}$$

d > 0: Verschiebung nach **links**
d < 0: Verschiebung nach **rechts**



Rot:

$$y = \frac{1}{x + 3} - 2$$

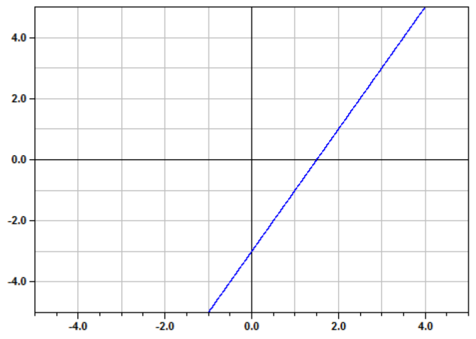
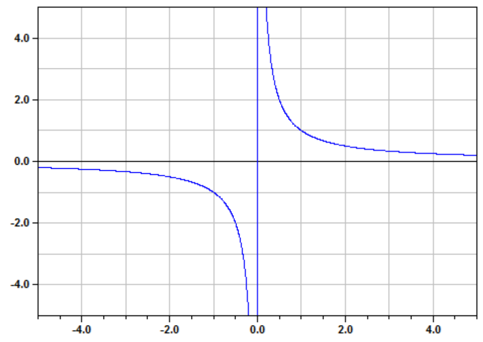
Grün:

$$y = \frac{1}{x - 4} + 1$$

Verschiebung in **x- und y-Richtung**:

$$y = g(x) = \frac{1}{x + d} + e$$

7.2. Gegenüberstellung der linearen Funktion und Hyperbel

	Lineare Funktion	**Hyperbel**
1) Funktionsgleichung	$y = ax + b, \text{resp.}\, y = mx + b$	Verschiedene, z.B. $y = \frac{c}{x}, y = \frac{c}{x} + b, y = \frac{c}{x+a} b, \text{usw}$
2) Proportionalität	Direkte Proportionalität „je mehr desto mehr“	Indirekte Proportionalität „je mehr desto weniger“
3) Graph	 $y = f(x) = 2x - 3$	 $y = g(x) = \frac{1}{x}$
4) Was ist konstant?	Die Steigung a, resp. der Quotient $\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$	z.B. bei $y = \frac{c}{x}$ ist das Produkt $y_i \cdot x_i$ konstant

8. Die Quadratische Funktion

I) Funktionen der Form $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, mit $a \neq 0$, heissen **quadratische Funktionen** oder auch **Polynomfunktionen zweiten Grades**.

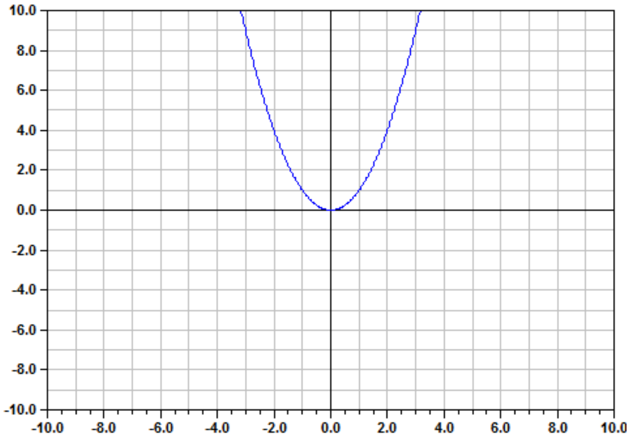
II) Der Graph der quadratischen Funktion heisst **Parabel**.

III) Jede Lösung der Gleichung $0 = ax^2 + bx + c$ ist eine **Nullstelle der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$**.

IV) Die „Spitze“ der Parabel heisst Scheitelpunkt.

8.1. Der Graph von $y = f(x) = ax^2$

($a \neq 0$)



1)	$a = 1$	Normalparabel (NP)
2)	$a > 1$	Stauchung bezüglich der NP
3)	$0 < a < 1$	Streckung bezüglich der NP
4)	$a = -1$	an der x-Achse gespiegelte NP
5)	$a < -1$	Stauchung bez. der NP und Spiegelung an der x-Achse
6)	$-1 < a < 0$	Streckung bez. der NP und Spiegelung an der x-Achse

Eigenschaften von $f(x) = ax^2$

1) DB und WB:	$DB = \mathbb{R}$ I) Für $a > 0$: $WB = \mathbb{R}_+$ II) Für $a < 0$: $WB = \mathbb{R}_-$
2a) Nullstelle:	$x = 0$
2b) Schnittpunkt mit x-Achse:	$A(0;\ 0)$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0;\ 0)$
4) Umkehrfunktion:	siehe Wurzelfunktionen
5) Scheitelpunkt:	$S(0;\ 0)$
6) Spezielles:	Der Wechsel von $a > 0$ zu $a < 0$ entspricht einer Spiegelung an der x-Achse.

8.2. Der Graph von $y = f(x) = ax^2 + c$

Frage: Was bewirkt die Addition mit der Konstante c?

Antwort: Eine Verschiebung entlang der y-Achse.

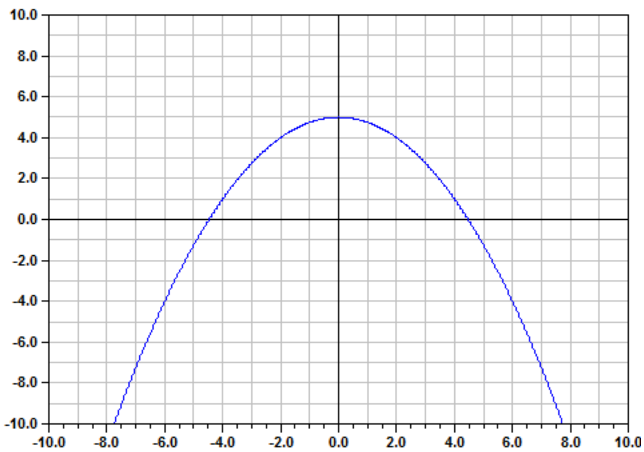
I)	**$c > 0$**	Verschiebung der Parabel $y = ax^2$ **nach oben**
II)	**$c < 0$**	Verschiebung der Parabel $y = ax^2$ **nach unten**

Eigenschaften von $f(x) = ax^2 + c$

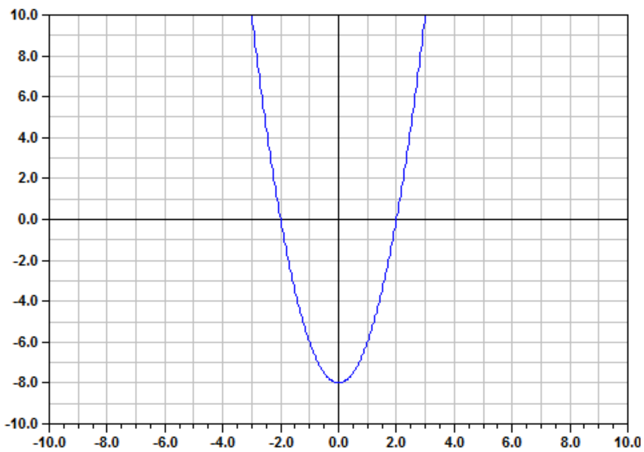
1) DB und WB:	$DB = \mathbb{R}$ I) Für $a > 0$: $WB = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq c \}$ II) Für $a < 0$: $WB = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq c \}$
2a) Nullstellen:	Lösungen der Gleichung $0 = ax^2 + c$
2b) Schnittpunkt mit x-Achse:	I) $\left(\sqrt{\frac{-c}{a}};\ 0\right)$ & $\left(-\sqrt{\frac{-c}{a}};\ 0\right)$, falls $\frac{-c}{a} \geq 0$ II) Keine Schnittpunkte, falls $\frac{-c}{a} < 0$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0;\ c)$
4) Scheitelpunkt:	$S(0;\ c)$
5) Spezielles:	Der Wechsel von $a > 0$ zu $a < 0$ entspricht einer Spiegelung an der Geraden $y = c$.

Graph von $y = f(x) = ax^2 + c$ und deren Stauchung / Streckung & Verschiebung nach oben/unten

$y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 5$



$y = f(x) = 2x^2 - 8$



Aufgabe:

a) Bestimmen Sie nun durch Herauslesen aus dem Diagramm den Scheitelpunkt, die Nullstellen und den Schnittpunkt mit der y-Achse.

b) Verifizieren Sie die Resultate rechnerisch.

8.3. Der Graph von $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ besitzt den
Scheitelpunkt

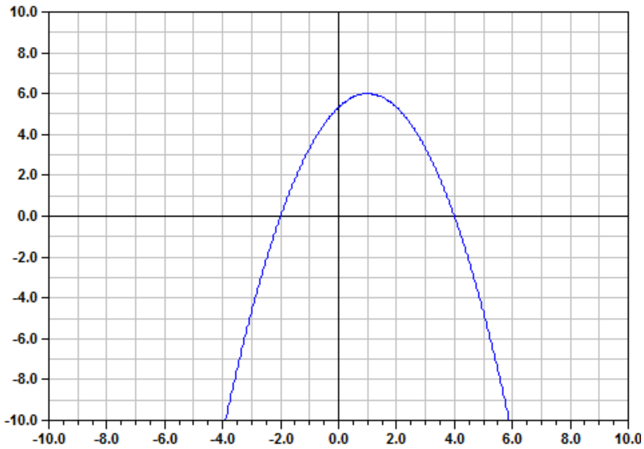
$$\mathbf{S}\left(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right) \text{ resp. } \mathbf{S}\left(-\frac{b}{2a};c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

Eigenschaften von $f(x) = ax^2 + bx + c$

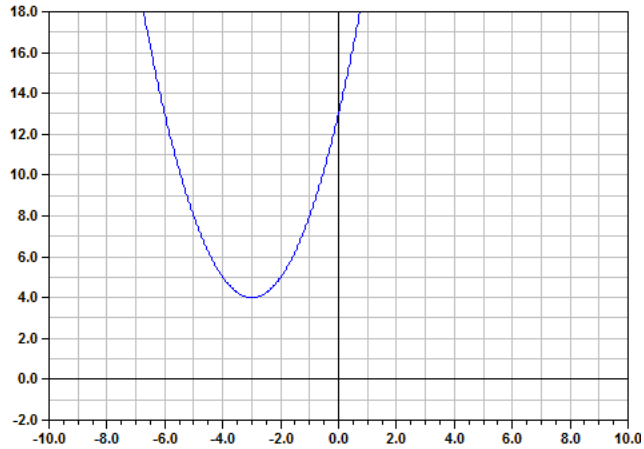
1) DB und WB:	DB = $\mathbb{R}$ I) Für $a > 0$: WB = $\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq c - \frac{b^2}{4a} \}$ II) Für $a < 0$: WB = $\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq c - \frac{b^2}{4a} \}$
2) Nullstelle(n):	Lösung(en) der Gleichung $0 = ax^2 + bx + c$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0;\ c)$
4) Scheitelpunkt:	$S\left(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ resp. $S\left(-\frac{b}{2a};c-\frac{b^2}{4a}\right)$

Graph von $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

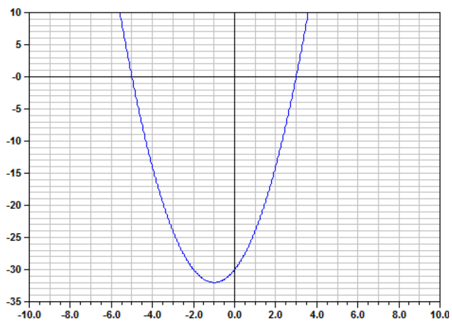
$$y = f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$$



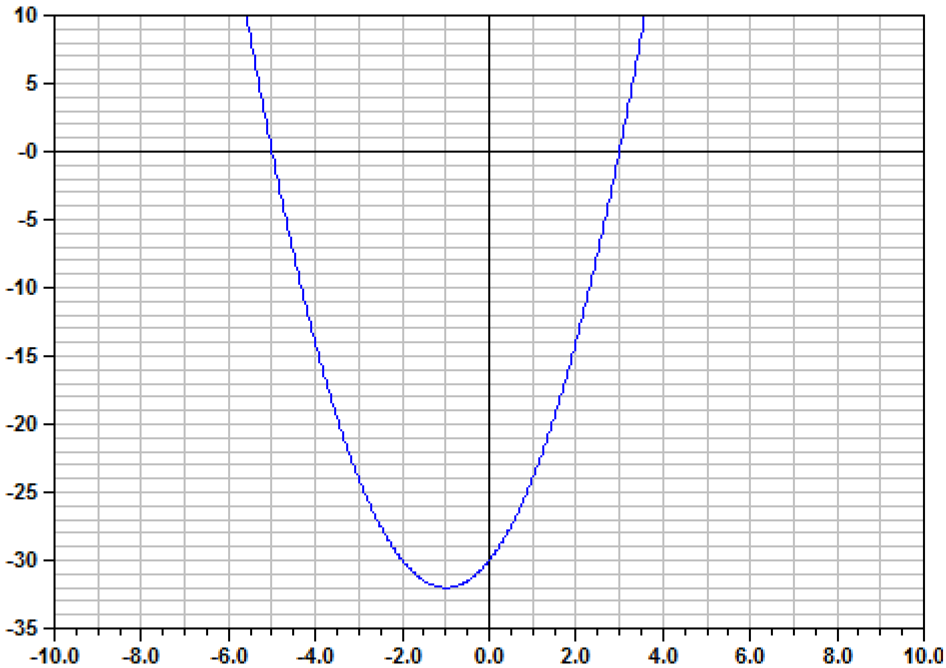
$$y = f(x) = x^2 + 6x + 13$$



8.4. Zusammenfassung

Eigenschaften	allgemein	Beispiel
0) Quadratische Funktion	$y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$	$y = f(x) = 2x^2 + 4x - 30$
1) Öffnung	Für $a > 0$, nach oben geöffnet. Für $a < 0$, nach unten geöffnet.	$a = 2$, also nach oben geöffnet.
2) Schnittpunkt mit y-Achse	B(0; c)	B(0; -30)
3) Nullstelle(n)	Lösungen der Gleichung: $0 = ax^2 + bx + c$ (O, 1 oder 2 Lösungen)	$0 = 2x^2 + 4x - 30$ $x^2 + 2x - 15 = 0$ $(x + 5) \cdot (x - 3) = 0$ $\Rightarrow x_1 = -5$ $\Rightarrow x_2 = 3$
4) Scheitelpunkt	$S\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$ <u>Bemerkung:</u> Hat die quadratische Funktion zwei Nullstellen, so liegt die x-Koordinate des Scheitelpunktes genau in der Mitte dieser zwei Nullstellen.	$S\left(-\frac{4}{2\cdot 2}; -30 - \frac{4^2}{4\cdot 2}\right) =$ $S(-1; -32)$
5) DB und WB	$D = \mathbb{R}$ I) Für $a > 0$: $W = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq c - \frac{b^2}{4a} \}$ II) Für $a < 0$: $W = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq c - \frac{b^2}{4a} \}$	$DB = \mathbb{R}$ $WB = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq -32 \}$
6) Zeichnung	Mit den bisher erarbeiteten Punkten können wir das Funktionendiagramm qualitativ richtig zeichnen.	
7) Gegeben der Scheitelpunkt	Gegeben sei der Scheitelpunkt S(d; e), dann lautet die Gleichung der quadratischen Funktion $y = f(x) = a(x - d)^2 + e$ Der Parameter a muss noch mit einer zusätzlichen Bedingung (z.B. ein Punkt des Graphen) bestimmt werden. <u>Bemerkung:</u> Es gilt auch das Umgekehrte: Ist $y = f(x) = a(x - d)^2 + e$, resp. $y = f(x) = a(x + g)^2 + e$ gegeben, so lautet der Scheitelpunkt S(d; e), resp. S(–g; e)	S(-1; -32) und P(1; -24) $y = f(x) = a(x - (-1))^2 + (-32)$ $y = f(x) = a(x + 1)^2 - 32$ P eingesetzt: $-24 = a(1 + 1)^2 - 32$ $-24 = 4a - 32$ $4a = 8$ $a = 2$ Also: $y = f(x) = 2(x + 1)^2 - 32$ Kontrolle durch Ausrechnen: $y = 2(x^2 + 2x + 1) - 32 = 2x^2 + 4x - 30$

8) Gegeben die Nullstellen	Gegeben seien die zwei Nullstellen x1 = r und x2 = s, dann lautet die Gleichung der quadratischen Funktion $y = f(x) = a(x - r) \cdot (x - s)$ Der Parameter a muss noch mit einer zusätzlichen Bedingung (z.B. ein Punkt des Graphen) bestimmt werden.	$x_1 = -5$ & $x_2 = 3$, und P(1; -24) $y = f(x) = a(x - (-5)) \cdot (x - 3)$ $y = f(x) = a(x + 5) \cdot (x - 3)$ P eingesetzt: $-24 = a(1 + 5) \cdot (1 - 3)$ $-24 = a \cdot 6 \cdot - 2 \Rightarrow -12a = -24 \Rightarrow a = 2$ Also: $y = f(x) = 2(x + 5) \cdot (x - 3)$ Kontrolle durch Ausrechnen: $y = 2(x^2 + 2x - 15) = 2x^2 + 4x - 30$
9) Schnittpunkt(e) mit anderen Funktionen, z.B. mit der Geraden y = g(x) = mx + b	Lösen der Gleichung: $ax^2 + bx + c = mx + b$ Bestimmen der Schnittpunkte durch Einsetzen der Lösungen. <u>Bemerkung:</u> Die zwei „b“ sind nicht die gleichen Werte!	Schnittpunkt mit der Geraden $Y = 10x - 34$ $2x^2 + 4x - 30 = 10x - 34$ $2x^2 - 6x + 4 = 0$ $x^2 - 3x + 2 = 0$ $(x - 2) \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 1$ Einsetzen in eine der beiden Gleichungen ergibt die Schnittpunkte: P(1; -24) und Q(2; -14)
10) Spezialfall: Der Scheitelpunkt liegt auf der x-Achse	In diesem Fall hat die quadratische Funktion eine doppelte Nullstelle x = r. D.h. die Funktionsgleichung lautet nun: $y = f(x) = a(x - r)^2$ Wie leicht ersichtlich ist, ist das das Gleiche, wie wenn mit der Form unter Punkt 7) gearbeitet wird: $y = f(x) = a(x - r)^2 + 0 = a(x - r)^2$	Eine quadratische Nullstelle hat die doppelte Nullstelle x = -3, und sie schneidet die y-Achse an der Stelle y = 4,5. $y = f(x) = a(x - (-3))^2 = a(x+3)^2$ Bestimmen von a durch Einsetzen des Punktes (0; 4,5) $4{,}5 = a(0 + 3)^2 = a \cdot 3^2 = 9a \Rightarrow a = ½$ Also: $y = f(x) = ½(x + 3)^2$



8.5. Verschiedene Aufgaben

Aufgabe 1:	Geg.: Scheitelpunkt, ein Punkt	Ges.: Gleichung Parabel
Aufgabe 2:	Geg.: Normalparabel zwei Punkte	Ges.: Gleichung Parabel
Aufgabe 3:	Geg.: drei Punkte	Ges.: Gleichung Parabel
Aufgabe 4:	Geg.: Nullstellen, ein Punkt	Ges.: Gleichung Parabel
Aufgabe 5:	Geg.: Parabel, Gerade y = x + 3	Ges.: Schnittpunkt(e)
Aufgabe 6:	Geg.: Parabel, Gerade y = mx – 9	Ges.: Schnittpunkt(e)
Aufgabe 7:	Geg.: Parabel, Gerade y = 3x +q	Ges.: Schnittpunkt(e)
Aufgabe 8:	Geg.: Parabel, ein Punkt einer Geraden	Ges.: Gl. Parabel, Gerade, Schnittpunkt
Aufgabe 9:	Geg.: zwei Parabeln	Ges.: quadratische Funktion, Schnittpunkt
Aufgabe 10:	Geg.: Frosch, Nullstellen, Scheitelpunkt	Ges.: Gleichung Parabel
Aufgabe 11:	Geg.: Quadrat, Parabel, Scheitelpunkt	Ges.: Gleichung Parabel, Fläche Quadrat

---

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ so, dass sie den Scheitelpunkt S(-1; 5) hat und durch den Punkt (3; -27) geht.

Lösung:

Wegen dem Scheitelpunkt S(-1; 5) hat die quadratische Funktion (cf. Tab. In Kap. 8.4 die Spalte 7)) die Gleichung $y = f(x) = a(x + 1)^2 + 5$. Durch Einsetzen des Punktes (3; -27) erhalten wir a:

$-27 = a(3 + 1)^2 + 5 \rightarrow 16a = -32 \rightarrow a = -2$.

Somit lautet die Funktion: $y = f(x) = -2(x + 1)^2 + 5 = -2x^2 - 4x + 3$

2. Lösungsvariante: Mit dem Punkt P und dem Scheitelpunkt haben wir 3 Angaben:

1) x-Koordinate des Scheitelpunktes: $-1 = -\frac{b}{2a}$

2) y-Koordinate des Scheitelpunktes: $5 = c - \frac{b^2}{4a}$

3) Der Punkt (3; -27): $-27 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$

Aus 1) folgt: $b = 2a$

In 2) eingesetzt ergibt es: $5 = c - \frac{4a^2}{4a} \Rightarrow 5 = c - a \Rightarrow c = 5 + a$

In 3) kann nun b = 2a und c = 5 + a eingesetzt werden: $-27 = a \cdot 3^2 + 2a \cdot 3 + 5 + a$

resp. $-32 = 16a \Rightarrow a = -2$

Für alle Variablen zusammengefasst: $a = -2$; $b = -4$; $c = 3$

Resultat: Die Gleichung der Parabel lautet: $y = f(x) = -2x^2 - 4x + 3$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Gleichung der versetzten Normalparabel (d.h. eine Parabel, die weder gestreckt noch gestaucht ist) die durch die 2 Punkte P(2; -7) und Q(-3; 8) geht.

Lösung:

Wir wissen, dass die Gleichung einer Normalparabel von der Form $y = f(x) = x^2 + bx + c$ ist.

Die zwei Punkte eingesetzt ergeben das Gleichungssystem:

I. $-7 = 2^2 + 2b + c$

II. $8 = (-3)^2 - 3b + c$

Welches die Lösungen b = -2 und c = -7 hat.

Resultat:

Die Gleichung der Parabel lautet: $y = f(x) = x^2 - 2x - 7$

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die Gleichung einer Parabel, die durch die 3 Punkte P(1; -1), Q(2; 4) und R(4; 8) geht.

Lösung:
Wir wissen, dass die Gleichung einer Parabel von der Form $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ist.
Die drei Punkte eingesetzt ergeben das Gleichungssystem:

I. $-1 = a \cdot 1^2 + 1b + c$
II. $4 = a \cdot 2^2 + 2b + c$
III. $8 = a \cdot 4^2 + 4b + c$

Welches die Lösungen a = -1, b = 8 und c = -8 hat.

Resultat:
Die Gleichung der Parabel lautet: $y = f(x) = -x^2 + 8x – 8$

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie die Gleichung einer Parabel, der Form $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, die die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$ hat und durch den Punkt P(7; 5) geht.

Lösung:
Die Nullstellen sind Punkte der Parabel ⇒ Q(2; 0) und R(4: 0). Damit sind drei Punkte von der Parabel bekannt. Die drei Punkte eingesetzt ergeben das Gleichungssystem:

I. $5 = a \cdot 7^2 + 7b + c$
II. $0 = a \cdot 2^2 + 2b + c$
III. $0 = a \cdot 4^2 + 4b + c$

Welches die Lösungen a = 1/3, b = -2 und c = 8/3 hat.

Resultat:
Die Gleichung der Parabel lautet: $y = f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{8}{3}$

2. Lösungsvariante:
Wenn die zwei Nullstellen der quadratischen Funktion gegeben sind – z.B. $x_1 = r$ und $x_2 = s$, so kann die quadratische Funktion mit $y = f(x) = a(x – r) \cdot (x – s)$ dargestellt werden. Den Parameter a muss mit einer weiteren Bedingung (z.B. Einsetzen eines Punktes) bestimmt werden.

Also: Es sind zwei Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$ gegeben, somit kann die Funktion mit
$y = f(x) = a(x – 2) \cdot (x – 4)$ dargestellt werden.

Durch Einsetzen des Punktes P(7; 5) ergibt sich die Gleichung: $5 = a(7 – 2) \cdot (7 – 4) \Rightarrow a = 1/3$.

Und somit: $y = f(x) = \frac{1}{3}(x - 2) \cdot (x - 4) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{8}{3}$

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$ mit der Geraden $y = g(x) = x + 3$.

Lösung:
Die 2 Gleichungen sind gleichzusetzen: $\frac{1}{4}x^2 = x + 3$ resp. $\frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0$
Welches die Lösungen $x_1 = 6$ und $x_2 = -2$ ergibt.
Diese x-Koordinaten sind noch für die Berechnung der y-Koordinaten in eine der zwei Ausgangsgleichungen einzusetzen.

Resultat:
Die Schnittpunkte lauten: $S_1 = (6; 9)$ und $S_2 = (-2; 1)$.

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden y = g(x) = mx – 9 so, dass die Gerade mit der Parabel y = f(x) = x^2 genau einen Schnittpunkt hat. Bestimmen Sie zudem diesen Schnittpunkt.

Lösung:
Die 2 Gleichungen sind gleichzusetzen: $x^2 = mx - 9$ resp. $x^2 - mx + 9 = 0$
Da die Gerade und die Parabel nur einen Schnittpunkt haben, hat die Gleichung $x^2 - mx + 9 = 0$ nur eine Lösung. D.h. die Diskriminante ($b^2 - 4ac$) ist gleich Null. D.h. $(-m)^2 - 36 = 0$ resp. $m_1 = 6$ und $m_2 = -6$.

Resultat:
Die Geraden $g_1(x) = 6x - 9$ und $g_2(x) = -6x - 9$ haben je genau einen Schnittpunkt mit der Parabel y = f(x) = x^2

Schnittpunktbestimmung:
Die Gleichung $x^2 = 6x - 9$ resp. $x^2 - 6x + 9 = 0$ ergibt x = 3. Eingesetzt folgt der Punkt P(3; 9).
Die Gleichung $x^2 = -6x - 9$ resp. $x^2 + 6x + 9 = 0$ ergibt x = -3. Eingesetzt folgt der Punkt P(-3; 9).

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden y = g(x) = 3x +q so, dass die Gerade mit der Parabel y = f(x) = x^2 genau einen Schnittpunkt hat. Bestimmen Sie zudem diesen Schnittpunkt.

Lösung:
Die 2 Gleichungen sind gleichzusetzen: $x^2 = 3x + q$ resp. $x^2 - 3x - q = 0$
Da die Gerade und die Parabel nur einen Schnittpunkt haben, hat die Gleichung $x^2 - 3x - q = 0$ nur eine Lösung. D.h. die Diskriminante ($b^2 - 4ac$) ist gleich Null. D.h. $9 + 4q = 0$ resp. $q = -\frac{9}{4}$.

Resultat:
Die Gerade $y = g(x) = 3x - \frac{9}{4}$ hat genau einen Schnittpunkt mit der Parabel $y = f(x) = x^2$

Schnittpunktbestimmung:
Die Gleichung $x^2 = 3x - \frac{9}{4}$ resp. $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$ ergibt x = 1.5. Eingesetzt folgt der Punkt P(1.5; 2.25).

Aufgabe 8:
Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden so, dass die Gerade den Punkt P(-1; -8) enthält und mit der Parabel y = f(x) = x^2 genau einen Schnittpunkt hat.

Lösung:
Die Geradengleichung lautet: y = mx + b.
Einsetzten des Punktes P(-1; -8) ergibt -8 = m(-2) + b. Auf b aufgelöst: b = m – 8.
Die Geradengleichung mit b = m – 8 neu geschrieben: y = mx + m – 8.

Die zwei Gleichungen sind gleichzusetzen: $x^2 = mx + m - 8$ resp. $x^2 - mx - m + 8 = 0$

Da die Gerade und die Parabel nur einen Schnittpunkt haben, hat die Gleichung nur eine Lösung.
D.h. die Diskriminante ($b^2 - 4ac$) ist gleich Null. D.h. $(-m)^2 - 4(-m + 8) = 0$ resp. $m^2 + 4m - 32 = 0$ resp. $(m - 4) \cdot (m + 8) = 0$ ergibt die Lösungen $m_1 = 4$ und $m_2 = -8$.
Da b = m – 8 ist, ergibt sich $b_1 = -4$ und $b_2 = -16$.

Resultat:
Die Gerade y = 4x – 4 und y = -8x – 16 erfüllen die geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 9:
Bestimmen Sie die quadratische Funktion y = f(x) = $-x^2 + 8x + c$ so, dass sie mit der Parabel y = f(x) = x^2 genau einen Schnittpunkt hat. Bestimmen Sie zudem diesen Schnittpunkt.

Lösung:
Die 2 Gleichungen sind gleichzusetzen: $x^2 = -x^2 + 8x + c$ resp. $-2x^2 + 8x + c = 0$.

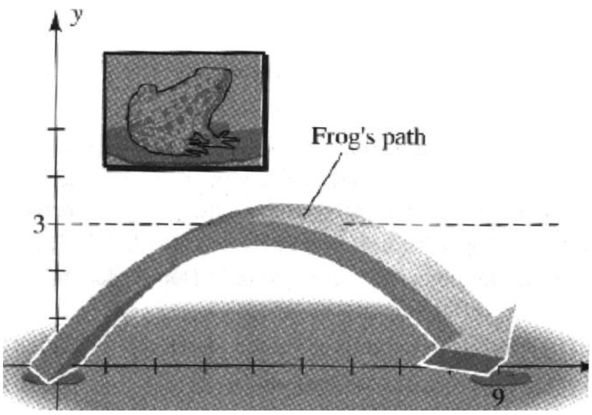
Da die zwei Parabeln nur einen Schnittpunkt haben, hat die Gleichung $-2x^2 + 8x + c = 0$ nur eine Lösung. D.h. die Diskriminante ($b^2 - 4ac$) ist gleich Null. D.h. $64 - (4 \cdot -2 \cdot c) = 0$ resp. $64 + 8c = 0$ resp. $64 = -8c$ resp. $c = -8$.

Resultat:
Die Parabel y = f(x) = $-x^2 + 8x - 8$ hat genau einen Schnittpunkt mit der Parabel y = f(x) = x^2.

Schnittpunktbestimmung:
Die Gleichung $x^2 = -x^2 + 8x - 8$ resp. $-2x^2 + 8x - 8 = 0$ resp. $x^2 - 4x + 4 = 0$ ergibt x = 2.
In eine der beiden Gleichungen eingesetzt, ergibt das den Punkt P(2; 4).

Aufgabe 10:
Die Flugbahn eines Frosches ist annähernd parabolisch (vgl. Abbildung). Der Frosch springt 9 Fuss weit und erreicht eine maximale Höhe von 3 Fuss.

Finden Sie die Gleichung der Parabel, die diese Flugbahn im gegeben Koordinaten System beschreib.



Lösung:
Die Funktion hat somit die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 9$, der Scheitelpunkt lautet S(4,5; 3).
Somit ist die Funktionsgleichung gegeben durch y = f(x) = $a(x - 0) \cdot (x - 9)$.

Durch Einsetzten des Punktes S(4,5; 3) kann der Parameter a berechnet werden:

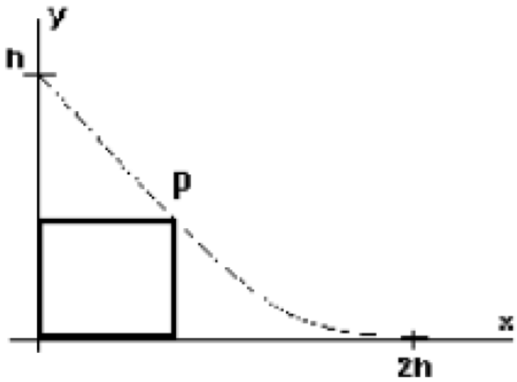
$$3 = a(4{,}5 - 0) \cdot (4{,}5 - 9) = a \cdot 4{,}5 \cdot (-4{,}5) = -20.25a \Rightarrow a = -\frac{3}{20{,}25} = -\frac{4}{27}$$

Resultat:
Die Funktionsgleichung lautet $y = f(x) = \frac{4}{27}x \cdot (x - 9) = \frac{4}{27}x^2 - \frac{4}{3}x$.

Aufgabe 11:

Gegeben ist die Parabel P mit dem Scheitelpunkt in S(2h; 0) und dem y-Achsenabschnitt h, wobei h eine gegebene Grösse ist.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel
b) Bestimmen Sie den Inhalt des einbeschriebenen Quadrates.



Lösung a):

Da der Scheitelpunkt auf der x-Achse liegt, lautet die Gleichung der Parabel
$y = f(x) = a(x - 2h)^2 = a(x^2 - 4xh + 4h^2) = a \cdot x^2 - 4ah \cdot x + 4h^2 \cdot a$.

Der Parameter a kann bestimmt werden, da wegen dem Schnittpunkt mit der y-Achse gilt:
$4h^2 \cdot a = h \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{4h}$.

Resultat a):

Die Funktion lautet: $y = f(x) = \frac{1}{4h}(x - 2h)^2 = \frac{1}{4h} \cdot x^2 - x + h$

Lösung b):

Wegen dem Quadrat muss gelten: $p = f(p) = \frac{1}{4h} \cdot p^2 - p + h \;\Rightarrow \frac{1}{4h} \cdot p^2 - 2p + h = 0$

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{1}{4h} \cdot h}}{2 \cdot \frac{1}{4h}} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 1}}{\frac{1}{2h}} = 2h \cdot \left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

$p_1 = 2h \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right) = 7.464h \Rightarrow p_1$ ist unmöglich ($p_1 > h$) !
$p_2 = 2h \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) = 0.536h$

Resultat b):

Mit p2 = 0.536h ergibt die Fläche $(p_2)^2 = (0.536h)^2 = 0.287h^2$

Anzahl Nullstellen einer quadratischen Funktion

Die Anzahl der Nullstellen ist gleich der Anzahl Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.
Eine quadratische Funktion kann also keine, eine oder zwei Nullstellen haben.

keine Nullstelle:

Wenn der Scheitelpunkt oberhalb der x-Achse und $a > 0$ ist,
resp. wenn der Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse und $a < 0$ ist.
Der Wert der Diskriminante ($b^2 - 4ac$) ist negativ.

1 Nullstelle:

Wenn der Scheitelpunkt auf der x-Achse liegt.
Der Wert der Diskriminante ($b^2 - 4ac$) ist Null.

2 Nullstellen:

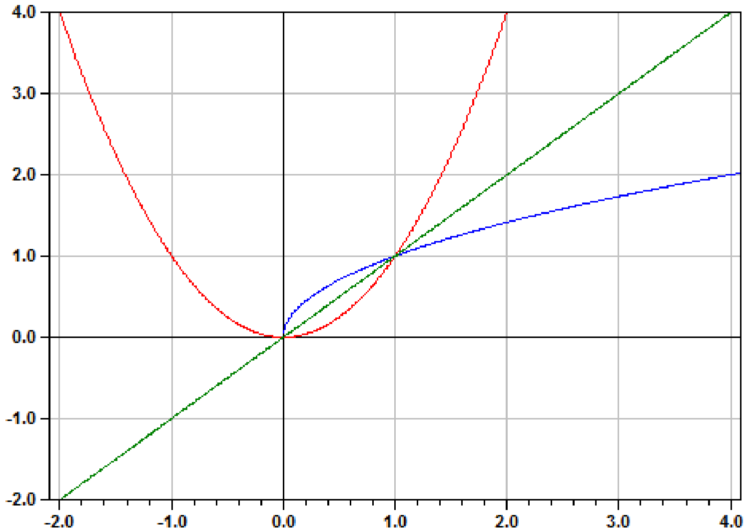
Wenn der Scheitelpunkt oberhalb der x-Achse und $a < 0$ ist,
resp. wenn der Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse und $a > 0$ ist.
Der Wert der Diskriminante ($b^2 - 4ac$) ist positiv.

9. Die Wurzelfunktion

9.1. Definition der Wurzelfunktion y = f(x) = √(x)

Die **Wurzelfunktion** ist die **Umkehrfunktion** der **Quadratfunktion**.

Die Wurzelfunktion $\mathbf{y = f(x) = \sqrt{x}}$ entsteht aus der Parabel $\mathbf{y = g(x) = x^2}$ durch die Spiegelung des rechten Parabelastes an der Winkelhalbierenden $\mathbf{y = h(x) = x}$

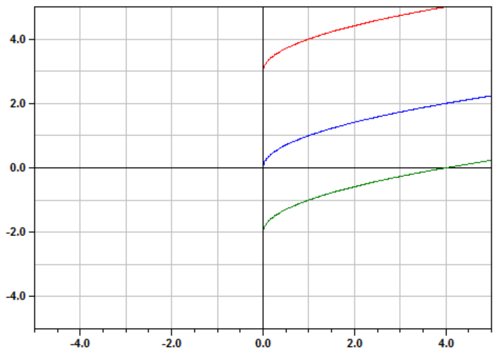


Blau: $y = f(x) = \sqrt{x}$

Rot: $y = g(x) = x^2$

Grün: $y = h(x) = x$

9.2. Der Graph von y = f(x) = √(x) + d



Rot: $y = \sqrt{x} + 3$

Blau: $y = \sqrt{x}$

Grün: $y = \sqrt{x} - 2$

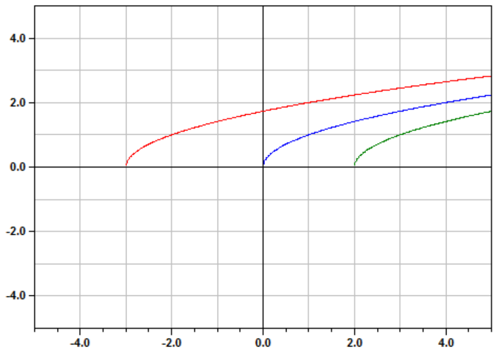
Verschiebung in **y-Richtung**:
$y = g(x) = \sqrt{x} + d$

d > 0: Verschiebung nach **oben**
d < 0: Verschiebung nach **unten**

Eigenschaften von $\mathbf{f(x) = \sqrt{x} + d}$

1) DB und WB:	DB = $\mathbb{R}_+$ = { x ∈ $\mathbb{R}$ | x ≥ 0} WB = { y ∈ $\mathbb{R}$ | y ≥ d}
2) Nullstelle:	Für d > 0: keine Nullstelle Für d ≤ 0: x = $(-d)^2 = d^2$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0;\ d)$

9.3. Der Graph von y = f(x) = √(x + c)



Rot: $y = \sqrt{x+3}$

Blau: $y = \sqrt{x}$

Grün: $y = \sqrt{x-2}$

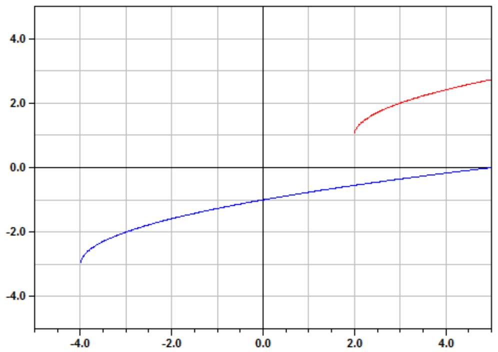
Verschiebung in **x-Richtung**:
$y = g(x) = \sqrt{x+c}$

c > 0: Verschiebung nach **links**
c < 0: Verschiebung nach **rechts**

Eigenschaften von $\mathbf{f(x) = \sqrt{x+c}}$

1) DB und WB:	DB = $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -c\}$ WB = $\mathbb{R}_+ = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
2) Nullstelle:	$x = -c$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	Für $c \geq 0$: $B(0;\ \sqrt{c})$ Für $c < 0$: keinen Schnittpunkt

9.4. Der Graph von y = f(x) = √(x + c) + d



Rot:
$y = \sqrt{x-2} + 1$

Blau:
$y = \sqrt{x+4} - 3$

Verschiebung in **x- und y-Richtung**:
$y = g(x) = \sqrt{x+c} + d$

Eigenschaften von $\mathbf{f(x) = \sqrt{x+c} + d}$

1) DB und WB:	DB = $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -c\}$ WB = $\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq d\}$
2) Nullstelle:	Für $d > 0$: keine Nullstelle Für $d \leq 0$: $x = (-d)^2 - c = d^2 - c$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	Für $c \geq 0$: $B(0;\ \sqrt{c} + d)$ Für $c < 0$: keinen Schnittpunkt

9.5. Verschiedene Aufgaben

Aufgabe 1:

Berechne die Schnittpunkte von $f(x) = \sqrt{x} + 1$ mit der Geraden $y = x$.

Lösung:

I) $y = \sqrt{x} + 1$

II) $y = x$

I) = II)

$$x = \sqrt{x} + 1$$
$$x - 1 = \sqrt{x}$$
$$(x-1)^2 = x$$
$$x^2 - 2x + 1 = x$$
$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

a = 1 | b = -3 | c = 1

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Durch das Einsetzen der Resultate in $x = \sqrt{x} + 1$ kann die Probe gemacht werden, ob die Ergebnisse x_1 und x_2 stimmen. Bei diesem Beispiel ist x_2 eine Scheinlösung.
Es gibt nur einen Schnittpunkt und der ist bei x_1.

Resultat:

Der Schnittpunkt lautet: $S\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Aufgabe 2:

Berechne die Schnittpunkte von $f(x) = \sqrt{x} - 2$ mit der Geraden $y = -x$.

Lösung:

I) $y = \sqrt{x} - 2$

II) $y = -x$

I) = II)

$$-x = \sqrt{x} - 2$$
$$-x + 2 = \sqrt{x}$$
$$(-x+2)^2 = x$$
$$x^2 - 4x + 4 = x$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

a = 1 | b = -5 | c = 4

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 1$$

Durch das Einsetzen der Resultate in $-x = \sqrt{x} - 2$ kann die Probe gemacht werden, ob die Ergebnisse x_1 und x_2 stimmen. Bei diesem Beispiel ist x_1 eine Scheinlösung.
Es gibt nur einen Schnittpunkt und der ist bei x_2.

Resultat:

Der Schnittpunkt lautet: $S(1;\ -1)$.

Aufgabe 3:
Berechne die Schnittpunkte von $\mathrm{f(x)} = \sqrt{\mathrm{x} - 0.2}$ mit der Geraden $\mathrm{y} = \mathrm{x}$.

Lösung:

I) $\mathrm{y} = \sqrt{\mathrm{x} - 0.2}$
II) $\mathrm{y} = \mathrm{x}$
I) = II) $\mathrm{x} = \sqrt{\mathrm{x} - 0.2}$
$\mathrm{x}^2 = \mathrm{x} - 0.2$
$\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} + 0.2 = 0$

a = 1 | b = -1 | c = 0.2

$$\mathrm{x}_{1,2} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 0.2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{0.2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathrm{x}_1 &= \frac{1 + \sqrt{0.2}}{2} \\ \mathrm{x}_2 &= \frac{1 - \sqrt{0.2}}{2} \end{aligned}$$

Durch das Einsetzen der Resultate in $\mathrm{x} = \sqrt{\mathrm{x} - 0.2}$ kann die Probe gemacht werden, ob die Ergebnisse x_1 und x_2 stimmen. Bei dieser Aufgabe stimmen beide Resultate.

Resultat:
Die Schnittpunkte lauten: $\mathrm{S}_1\left(\frac{1+\sqrt{0.2}}{2}; \frac{1+\sqrt{0.2}}{2}\right)$ und $\mathrm{S}_2\left(\frac{1-\sqrt{0.2}}{2}; \frac{1-\sqrt{0.2}}{2}\right)$.

Aufgabe 4:
Berechne die Schnittpunkte von $\mathrm{f(x)} = \sqrt{\mathrm{x} - 0.2}$ mit der Geraden $\mathrm{y} = -\mathrm{x}$.

Lösung:

I) $\mathrm{y} = \sqrt{\mathrm{x} - 0.2}$
II) $\mathrm{y} = -\mathrm{x}$
I) = II) $-\mathrm{x} = \sqrt{\mathrm{x} - 0.2}$
$\mathrm{x}^2 = \mathrm{x} - 0.2$
$\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} + 0.2 = 0$

a = 1 | b = -1 | c = 0.2

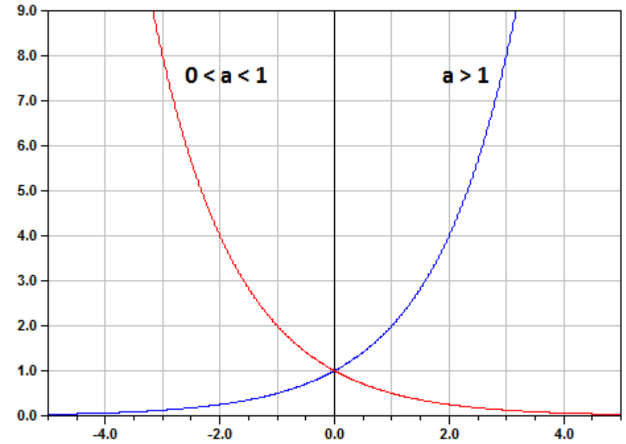
$$\mathrm{x}_{1,2} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 0.2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{0.2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathrm{x}_1 &= \frac{1 + \sqrt{0.2}}{2} \\ \mathrm{x}_2 &= \frac{1 - \sqrt{0.2}}{2} \end{aligned}$$

Durch das Einsetzen der Resultate in $\mathrm{x} = \sqrt{\mathrm{x} - 0.2}$ kann die Probe gemacht werden, ob die Ergebnisse x_1 und x_2 stimmen. Bei dieser Aufgabe sind beide Resultate Scheinlösungen.

Resultat:
Die Wurzelfunktion $\mathrm{f(x)} = \sqrt{\mathrm{x} - 0.2}$ hat mit der Geraden $\mathrm{y} = -\mathrm{x}$ keine Schnittpunkte.

10. Die Exponentialfunktion

10.1. Definition und Eigenschaften von f(x) = a^x



Funktionen der Form

y = f(x) = a^x

resp.

y = f(x) = b · a^x

($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; $b \neq 0$)

heissen

Exponentialfunktionen.

Eigenschaften von f(x) = a^x (für a > 1)

1) DB und WB:	DB = $\mathbb{R}$ WB = $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ resp. $\mathbb{R}_+^*$
2) Nullstelle:	Keinen Schnittpunkt mit der x-Achse
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0;\ 1)$
4) Steigungsverhalten, Monotonie:	Streng monoton **steigend**.
5) Gemeinsame Punkte:	$(0;\ 1)$
6) Spezielles:	Je grösser a, desto steiler die Kurve, resp. je näher a gegen Eins geht, desto flacher ist die Kurve.

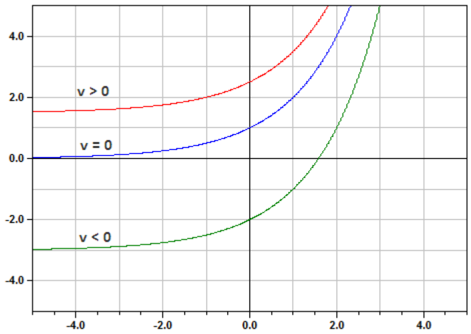
Eigenschaften von f(x) = a^x (für 0 < a < 1)

1) DB und WB:	DB = $\mathbb{R}$ WB = $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ resp. $\mathbb{R}_+^*$
2) Nullstelle:	Keinen Schnittpunkt mit der x-Achse
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0;\ 1)$
4) Steigungsverhalten, Monotonie:	Streng monoton **fallend**.
5) Gemeinsame Punkte:	$(0;\ 1)$
6) Spezielles:	Je näher a bei Eins ist, desto flacher ist die Kurve, resp. je näher a bei Null ist, desto steiler ist die Kurve.

10.2. Schieben und Strecken von Exponentialfunktionen

Vertikales Schieben $f(x) = a^x + v$

Addiert man zum Funktionswert einer Exponentialfunktion die Konstante v, so wird der Graph der Exponentialfunktion um v Einheiten in y-Richtung geschoben.



Rot: $y = 2^x + 1.5$

Blau: $y = 2^x$

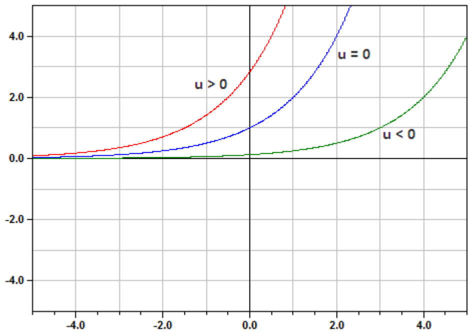
Grün: $y = 2^x - 3$

Verschiebung in **y-Richtung**:
$y = f(x) = a^x + v$

v > 0: Verschiebung nach **oben**
v < 0: Verschiebung nach **unten**

Horizontales Schieben $f(x) = a^{x+u}$

Addiert man zum Argument x bei einer Exponentialfunktion die Konstanten u, so wird der Graph der Exponentialfunktion um -u Einheiten in x-Richtung verschoben.



Rot: $y = 2^{x+1.5}$

Blau: $y = 2^x$

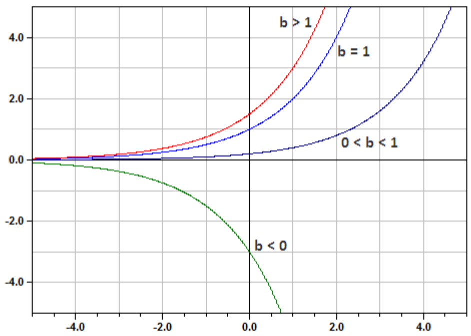
Grün: $y = 2^{x-3}$

Verschiebung in **x-Richtung**:
$y = f(x) = a^{x+u}$

u > 0: Verschiebung nach **links**
u < 0: Verschiebung nach **rechts**

Vertikales Strecken $f(x) = b \cdot a^x$

Multipliziert man den Funktionswert einer Exponentialfunktion mit dem Faktor b, so wird der Graph der Exponentialfunktion in y-Richtung gestreckt.



Rot: $y = 1.5 \cdot 2^x$

Blau: $y = 2^x$

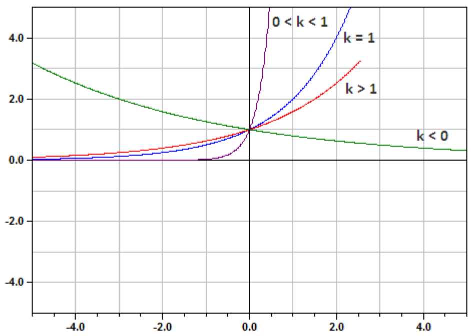
Grün: $y = -3 \cdot 2^x$

Violett: $y = 0.2 \cdot 2^x$

Streckung in **y-Richtung**:
$y = f(x) = b \cdot a^x$

Horizontales Strecken $f(x) = a^{x/k}$

Dividiert man das Argument einer Exponentialfunktion durch den Faktor k, so wird der Graph der Exponentialfunktion in x-Richtung gestreckt.



Rot: $y = 2^{\frac{x}{1.5}}$

Blau: $y = 2^x$

Grün: $y = 2^{\frac{x}{-3}}$

Violett: $y = 2^{\frac{x}{0.2}}$

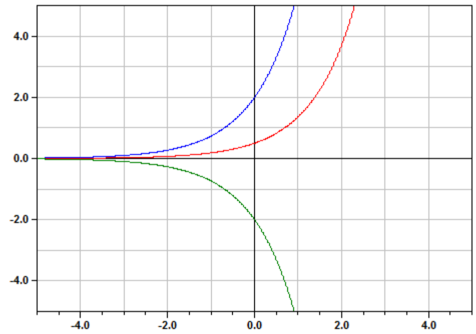
Streckung in **x-Richtung**:
$y = f(x) = a^{\frac{x}{k}}$

10.3. Definition und Eigenschaften von $f(x) = b \cdot a^x$

Es gibt 2 Fälle zu unterscheiden:

i) $b > 0$ Die prinzipielle Form der Funktion bleibt erhalten.

ii) $b < 0$ Die Funktion wird an der x-Achse gespiegelt.



Blau: $y = f(x) = 2 \cdot e^x$

Rot: $y = g(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x$

Grün: $y = h(x) = -2 \cdot e^x$

Eigenschaften von $f(x) = b \cdot a^x$

1) Schnittpunkt mit y-Achse:	$S(0;\ b)$

10.4. Definition und Eigenschaften von $f(x) = b \cdot a^x + v$

Es gibt 2 Fälle zu unterscheiden:

i) $b > 0$ Die prinzipielle Form der Funktion bleibt erhalten.

ii) $b < 0$ Die Funktion wird an der x-Achse gespiegelt.

Eigenschaften von $f(x) = b \cdot a^x + v$ (für $b > 0$)

	$v > 0$	**$v < 0$**
1) DB und WB:	$DB = \mathbb{R}$ $WB = \{y \in \mathbb{R} \mid y > v\}$	$DB = \mathbb{R}$ $WB = \{y \in \mathbb{R} \mid y > v\}$
2) Nullstelle:	Keinen Schnittpunkt mit der x-Achse	$x = \log_a\left(\frac{-v}{b}\right)$
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0;\ b + v)$	$B(0;\ b + v)$

Eigenschaften von $f(x) = b \cdot a^x + v$ (für $b < 0$)

	$v > 0$	**$v < 0$**
1) DB und WB:	$DB = \mathbb{R}$ $WB = \{y \in \mathbb{R} \mid y < v\}$	$DB = \mathbb{R}$ $WB = \{y \in \mathbb{R} \mid y < v\}$
2) Nullstelle:	$x = \log_a\left(\frac{-v}{b}\right)$	Keinen Schnittpunkt mit der x-Achse
3) Schnittpunkt mit y-Achse:	$B(0;\ b + v)$	$B(0;\ b + v)$

10.5. Umformung einer Zahl in einen e-Zahl

Wenn für eine Zahl **$a = e^M$** gelten soll, so muss **$M = \ln a$** sein.

Beispiel: $2{,}34 = e^{\ln 2{,}34} = e^{0{,}85}$ | $1{,}078 = e^{\ln 1{,}078} = e^{0.075}$ | $(1+0{,}065) = e^{\ln(1{,}065)} = e^{0{,}063}$

10.6. Umformung der allg. Exponentialfunktion in die e-Funktion

Eine Exponentialfunktion der Form

$y = f(x) = b \cdot a^x \quad (a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\} = \mathbb{R}_+\backslash\{0,1\},\ \ b \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$

kann in eine e-Funktion („wissenschaftliche Darstellung“) umgewandelt werden.

Dabei gilt: $\mathbf{y = f(x) = b \cdot a^x = b \cdot e^{x \ln(a)}}$

Beispiel: M ist so zu finden, dass $y = f(x) = b \cdot a^x = b \cdot e^{Mx}$ gilt.

$$
\begin{aligned}
b \cdot a^x &= b \cdot e^{Mx} && \text{| Division mit b} \\
a^x &= e^{Mx} && \text{| Potenzgesetze anwenden} \\
a^x &= (e^M)^x && \text{| Vergleich der Basen} \\
a &= e^M && \text{| Exp. Gleichung auf M lösen} \\
\ln(a) &= \ln(e^M) \\
M &= \ln a
\end{aligned}
$$

10.7. Exponentielle(s) Wachstum, resp. Abnahme (Verdoppelungs- / Halbwertszeit)

Verdoppelungszeit T_V: Zeitspanne, in der die betrachtete Grösse auf das jeweilige Doppelte des vorangegangenen Wertes ansteigt.

Eine **exponentielle Zunahme** werde mit der Exponentialfunktion $f(t) = b \cdot a^t$ $(a > 1)$ beschrieben. Die **Verdoppelungszeit** berechnet sich dann wie folgt:

$$\mathbf{T_V = \log_a 2 = \frac{\lg 2}{\lg a} = \frac{\ln 2}{\ln a}}$$

Halbwertszeit T_H: Zeitspanne, in der sich die betrachtete Grösse halbiert.

Eine **exponentielle Abnahme** werde mit der Exponentialfunktion $f(t) = b \cdot a^t$ $(0 < a < 1)$ beschrieben. Die **Halbwertszeit** berechnet sich dann wie folgt:

$$\mathbf{T_H = \log_a 0,5 = \frac{\lg 0,5}{\lg a} = \frac{\ln 0,5}{\ln a} = \frac{-\ln 2}{\ln a}}$$

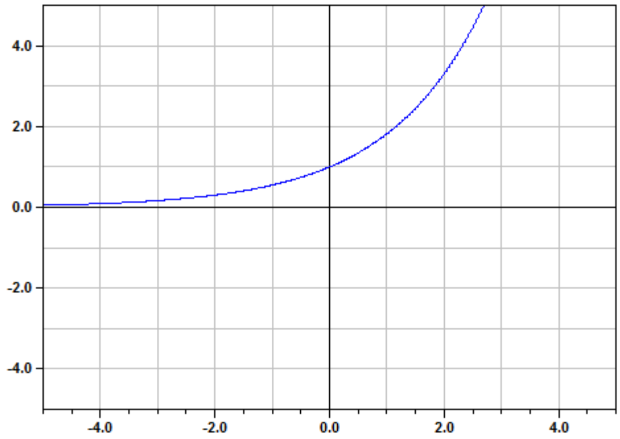
Ver- p- facht: Zeitspanne, in der sich die betrachtete Grösse um „ver- p- facht“ hat.

Eine exponentielle Zunahme/Abnahme werde mit der Exponentialfunktion $f(t) = b \cdot a^t$ beschrieben. Die **Zeit**, bis sich etwas „ver- p- facht“ hat, berechnet sich dann wie folgt:

$$\mathbf{T_P = \log_a p = \frac{\lg p}{\lg a} = \frac{\ln p}{\ln a}}$$

10.8. Exponentielle Prozesse (Wachstums-, Abkling-, Sättigungsfunktion)

Wachstumsfunktion:

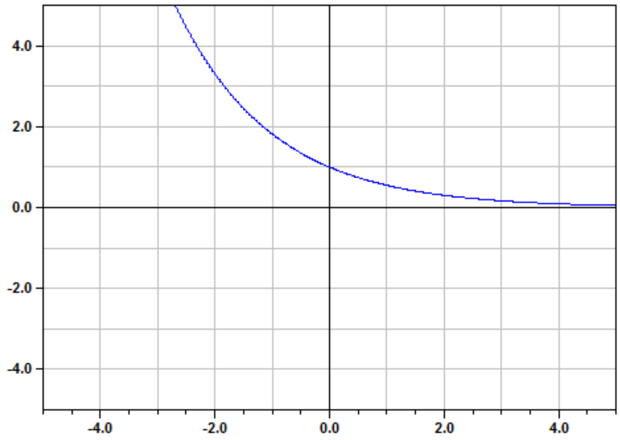


Ein **exponentielles Wachstum** der Grösse G = G(t) hat die Funktionsgleichung:

mit **a > 1**

$$\mathbf{G(t) = G_0 \cdot a^{\frac{t}{\tau}}}$$

Abklingfunktion oder Zerfallsfunktion:



Ein **exponentieller Zerfall** läuft nach einer der Funktionsgleichungen:

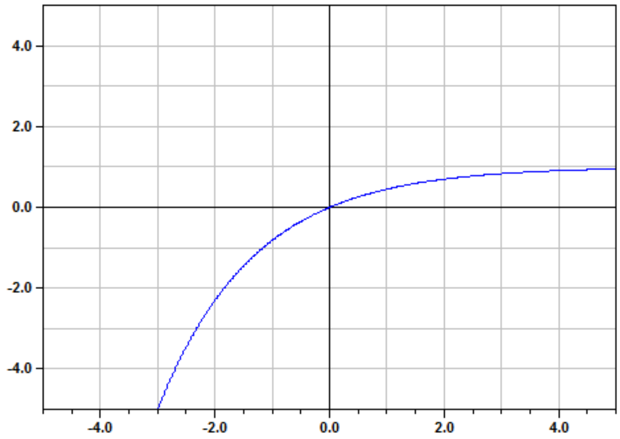
mit **0 < a < 1**

$$\mathbf{G(t) = G_0 \cdot a^{\frac{t}{\tau}}}$$

mit **a > 1**

$$\mathbf{G(t) = G_0 \cdot a^{-\frac{t}{\tau}}} \text{ oder } \mathbf{G(t) = G_0 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{t}{\tau}}}$$

Sättigungsfunktion:



Ein **exponentiell sättigende** Grösse entwickelt sich nach der Funktionsgleichung:

mit **a > 1**

$$\mathbf{G(t) = G_0 \cdot \left(1 - a^{\frac{t}{\tau}}\right)}$$

Dabei sind:

G: Exponentiell von der Zeit abhängige Grösse
t: Zeit
G_0: Anfangswert zum Zeitpunkt t = 0, oder Sättigungswert
τ: Zeitkonstante, während der die Grösse G um den Faktor a wächst oder abnimmt
a: Wachstums- oder Abnahmefaktor bezogen auf die Zeitkonstanten τ

10.9. Verschiedene Aufgaben

Aufgabe 1: Gegeben: zwei Punkte, Gesucht: Exponentialfunktion

Gegeben: $f(x) = b \cdot a^x$
$P(1.5; 2)$
$Q(-1; 0.5)$

Gesucht: a, b

Lösung:

I) $2 = b \cdot a^{1.5}$

II) $0.5 = b \cdot a^{-1} \quad \Rightarrow \quad 0.5 = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad b = 0.5 \cdot a$

II in I einsetzen: $2 = 0.5a \cdot a^{1.5} = 0.5a^{1+1.5} = 0.5a^{2.5}$

$4 = a^{2.5}$

$a = \sqrt[2.5]{4} = 1.741$

$b = 0.5 \cdot a = 0.5 \cdot 1.741 = 0.870$

Resultat:
$y = f(x) = 0.87 \cdot 1.74^x$

Aufgabe 2: Gegeben: zwei Funktionen, Gesucht: Schnittpunkt

Gegeben: $f(x) = 2^x$
$g(x) = 2^{4-x}$

Gesucht: Schnittpunkt

Lösung:

$$
\begin{aligned}
2^x &= 2^{4-x} && | \text{ Gleichungen gleichgesetzt, Exponentenvergleich} \\
x &= 4-x && | \\
2x &= 4 && | \\
x &= 2 && |
\end{aligned}
$$

Resultat:
$y = f(x) = 2^x = 2^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad S(2; 4)$

Aufgabe 3: Gegeben: zwei Funktionen, Gesucht: Schnittpunkt

Gegeben: $f(x) = 3^x$
$g(x) = 2^{x-1}$

Gesucht: Schnittpunkt

Lösung:

$$
\begin{aligned}
3^x &= 2^{x-1} && | \text{ Gleichungen gleichgesetzt} \\
\log(3^x) &= \log(2^{x-1}) && | \text{ Logarithmieren} \\
x \cdot \log 3 &= (x-1) \cdot \log 2 && | \\
x \cdot \log 3 &= x \cdot \log 2 - 1 \cdot \log 2 && | \\
x \cdot \log 3 - x \cdot \log 2 &= -\log 2 && | \\
x(\log 3 - \log 2) &= -\log 2 && | \\
x &= \frac{-\log 2}{\log 3 - \log 2} && | \\
x &= -1.709 && |
\end{aligned}
$$

Resultat:
$y = f(x) = 3^x = 3^{-1.709} = 0.1528 \quad \Rightarrow \quad S(-1.709; 0.153)$

Aufgabe 4: Gegeben: zwei Funktionen, Gesucht: Schnittpunkt

Gegeben: $f(x) = e^{x-2}$

$g(x) = e^x - 2$

Gesucht: Schnittpunkt

Lösung:

$$\begin{aligned}
e^{x-2} &= e^x - 2 && | \text{ Gleichungen gleichgesetzt}\\
\frac{e^x}{e^2} &= e^x - 2 && |\\
e^x &= e^2 \cdot e^x - e^2 \cdot 2 && |\\
e^2 \cdot e^x - e^x &= 2e^2 && |\\
e^x (e^2 - 1) &= 2e^2 && |\\
e^x &= \frac{2e^2}{e^2 - 1} && |\\
x &= \ln\left(\frac{2e^2}{e^2 - 1}\right) && |\\
x &= 0.839
\end{aligned}$$

Resultat:

$y = f(x) = e^x - 2 = e^{\ln\left(\frac{2e^2}{e^2-1}\right)} - 2 = \frac{2e^2}{e^2-1} - 2 = 0.313 \quad \Rightarrow \quad S(0.839; 0.313)$

Aufgabe 5: Funktionsgleichung bestimmen, Exp. Wachstum

Von einem bestimmten Wertpapier weiss man, dass es am 01.01.1988 einen Wert von Fr. 1‘800.- gehabt hat, und 11 Jahre später, also am 01.01.1999 einen Wert von Fr. 46‘000.-

a) Bestimmen Sie die Funktion $y = f(t) = a \cdot b^t$, die dieses exp. Wachstum beschreibt. Auf 3 Stellen nach dem Komma genau rechnen.
b) Der Wert eines anderen Anlagepapiers kann durch die Funktion $y = f(t) = 6100 \cdot 1{,}153^t$ beschrieben werden. Wann sind die beide Papiere gleich viel Wert? Welchen Wert haben dann beide?

Lösung a):

Wir setzen den 01.01.1988 zu t = 0; somit wird der 01.01.1999 zu t = 11.

Einsetzen des Punktes A(0; 1‘800) ergibt a = 1‘800.

Das Einsetzen des Punktes B(11; 46‘000) ergibt die Gleichung

$$46'000 = 1'800 \cdot b^{11} \quad \Rightarrow \quad b^{11} = \frac{46'000}{1'800} \quad \Rightarrow \quad b^{11} = \frac{46}{1{,}8} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[11]{\frac{46}{1{,}8}} = 1.343$$

Resultat a):

Die Funktion lautet $f(t) = 1‘800 \cdot 1{,}343^t$.

Lösung b):

$1‘800 \cdot 1{,}343^t = 6‘100 \cdot 1{,}153^t$

$$\frac{1'800}{6'100} = \frac{1{,}153^t}{1{,}343^t} \quad \Rightarrow \quad \frac{18}{61} = \left(\frac{1{,}153}{1{,}343}\right)^t \quad \Rightarrow \quad t = \left(\frac{\lg\left(\frac{18}{61}\right)}{\lg\left(\frac{1{,}153}{1{,}343}\right)}\right) = \frac{\lg 18 - \lg 61}{\lg 1{,}153 - \lg 1{,}343} = 8{,}00$$

$$1'800 \cdot 1{,}343^8 = 19'049.40$$

Resultat b):

Nach 8 Jahren haben sie den gleichen Wert erreicht, dieser beträgt dann Fr. 19‘049.40.

Aufgabe 6: Exp. Wachstum (Bakterienkultur pro 3min um 40% grösser)
Siehe 10.8 Exponentielle Prozesse: $G(t) = G_0 \cdot a^{(t/\tau)}$

Eine Bakterienkultur nimmt in 3 Minuten um 40% zu.

a) Bestimmen Sie die Zunahme pro Minute (inkl. Bestimmung der Funktionsgleichung)
b) Bestimmen Sie die Zunahme pro Sekunde
c) Bestimmen Sie die Zunahme pro Stunde

Gegeben: $\tau = 3$ min.
$a = 40\% \Rightarrow 1.4$

Gesucht: Exponentialfunktion $G(t) = G_0 \cdot a^{(t/\tau)}$

Lösung a):
Der Anfangswert wird vernachlässigt, somit wird aus $G(t) = G_0 \cdot a^{(t/\tau)} \Rightarrow G(t) = a^{(t/\tau)}$

$$G(t) = a^{\frac{t}{\tau}} = 1.4^{\frac{t}{3}} = 1.4^{\frac{1}{3}\cdot t} = \left(\sqrt[3]{1.4}\right)^t \quad \Rightarrow \quad G(t) = 1.1187^t$$

$$\Rightarrow (1.1187 - 1) \cdot 100\% = 11.87\%$$

Resultat a):
Die Bakterienkultur nimmt pro Minute um 11.87% zu.

Lösung b):
Da der Wachstum „pro 3 Min“ ist, muss der Exponent für „pro Sekunde“ mit 1/60 erweitert werden.

$$G(t) = 1.4^{\frac{t}{3\cdot 60}} = 1.4^{\frac{1}{180}\cdot t} = \left(\sqrt[180]{1.4}\right)^t \quad \Rightarrow \quad G(t) = 1.00187^t$$

$$\Rightarrow (1.00187 - 1) \cdot 100\% = 0.187\%$$

Resultat b):
Die Bakterienkultur nimmt pro Sekunde um 0.187% zu.

Lösung c):
Da der Wachstum „pro 3 Min“ ist, muss der Exponent für „pro Stunde“ mit 60 erweitert werden, resp. τ mit 1/60.

$$G(t) = 1.4^{\frac{t}{\frac{3}{60}}} = 1.4^{\frac{1}{0.05}\cdot t} = \left(\sqrt[0.05]{1.4}\right)^t \quad \Rightarrow \quad G(t) = 836.6826^t$$

$$\Rightarrow (836.6826 - 1) \cdot 100\% = 83'568.26\%$$

Resultat c):
Die Bakterienkultur nimmt pro Stunde um 83‘568.26% zu.

Klassische Lösung:

Gegeben: $y = f(x) = b \cdot a^x$
x = Zeit = 3 min.
b = Anfangswert = 1
y = Endwert = 1.4

Gesucht: a = Wachstumsfaktor

$$1.4 = 1 \cdot a^3 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{1.4} = 1.1187$$

Aufgabe 7: Exp. Wachstum (Algenteppich)

Ein Teich mit der Fläche A=560m^2 leidet unter einer Algenplage. Als man nach einem Tag (t_1 = 1Tag) den Algenteppich entdeckte, betrug die bedeckte Fläche bereits A_1 = 3.8m^2. nach 3 Tagen (t_2 = 3Tage) beträgt die bedeckte Fläche A_2 = 5.7m^2.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung A(t), die die bedeckte Algenfläche beschreibt?
b) Nach welcher Zeit t_3 verdoppelt sich die bedeckte Fläche?
c) Nach welcher Zeit t_4 ist der ganze Teich mit Algen bedeckt?

<u>Lösung a) Variante 1:</u>

I) $3.8 = b \cdot a^1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3.8}{a^1}$

II) $5.7 = b \cdot a^3 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5.7}{a^3}$

I) = II) $\frac{3.8}{a^1} = \frac{5.7}{a^3}$

$$3.8a^3 = 5.7a^1$$

$$a = \sqrt{\frac{5.7}{3.8}} = 1.2247 \quad \Rightarrow \quad b = 3.103$$

<u>Resultat a) Variante 1:</u>

Die Funktionsgleichung lautet: $y = A(t) = 3.103 \cdot 1.2247^{\,t}$.

<u>Lösung a) Variante 2:</u>

$$a = \frac{A_2}{A_1} = \frac{5.7}{3.8} = 1.5$$

$$\tau = t_2 - t_1 = 3d - 1d = 2d$$

$$A_1 = A_0 \cdot a^{\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{A_1}{a^{\left(\frac{t}{\tau}\right)}} = \frac{3.8}{1.5^{\frac{1}{2}}} = 3.103$$

<u>Resultat a) Variante 2:</u>

Die Funktionsgleichung lautet:$y = A(t) = 3.103 \cdot 1.5^{\frac{t}{2d}}$.

<u>Lösung b):</u>

$$2 \cdot A_0 = A_0 \cdot a^{\frac{t_3}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad 2 = a^{\frac{t_3}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad 2 = 1.5^{\frac{t_3}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad \lg(2) = \lg\left(1.5^{\frac{t_3}{\tau}}\right)$$

$$\frac{t_3}{2} \cdot \lg 1.5 = \lg 2 \quad \Rightarrow \quad t_3 = 2 \cdot \frac{\lg 2}{\lg 1.5} = 3.419$$

<u>Resultat b):</u>

Nach 3.42 Tagen hat sich die bedeckte Fläche verdoppelt.

<u>Lösung c):</u>

$$560 = 3.103 \cdot 1.2247^{t_4} \quad \Rightarrow \quad \frac{560}{3.103} = 1.2247^{t_4} \quad \Rightarrow \quad t_4 \cdot \lg(1.2247) = \lg\left(\frac{560}{3.103}\right)$$

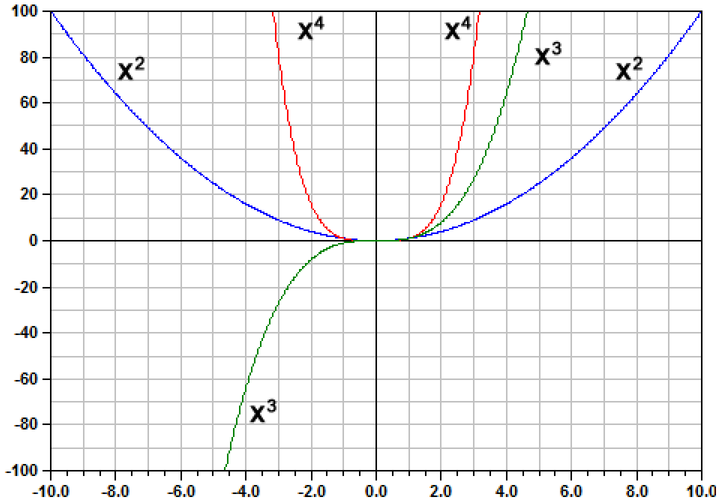
$$t_4 = \frac{\lg\left(\frac{560}{3.103}\right)}{\lg 1.2247} = \frac{\lg 560 - \lg 3.103}{\lg 1.2247} = 25.632$$

<u>Resultat c):</u>

Nach 25.63 Tagen ist der ganze Teich mit Algen bedeckt.

11. Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$

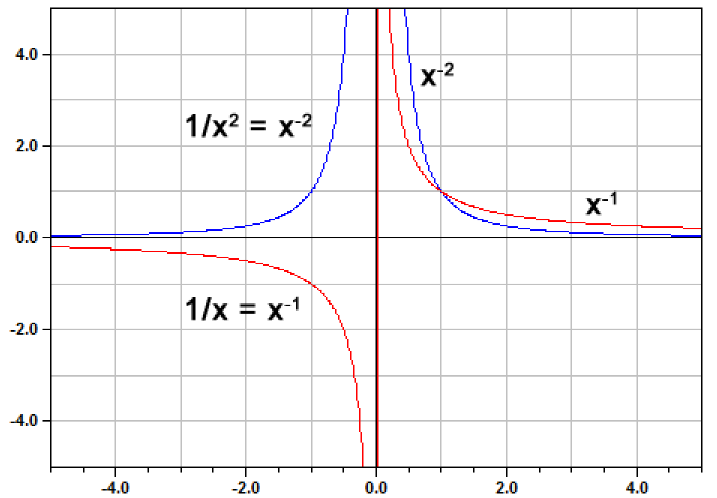
11.1. $y = f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$, „Parabeln“



Ein paar Key Words:

- $y = f(x) = a \cdot x^n$ entstünde aus $y = x^n$ durch Streckung ($0 < a$ 1) resp. Stauchung ($a > 1$).
- Wäre a zudem noch negativ, so würde zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse dazukommen.
- Beachten Sie die unterschiedliche Form der Parabel, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist. Entsprechend ändert sich der Wertebereich, die Symmetrie, Maxima und Minima.
- $y = f(x) = a \cdot x^n + d$ wäre eine zusätzliche Verschiebung entlang der y-Achse (nach oben für $d > 0$, nach unten für $d < 0$).
- Die Eigenschaften (z.B. Wertebereich, Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse usw.) ändern sich aufgrund der Verschiebung entlang der y-Achse (der Wert d).
- Im Weiteren hat auch der Grad (also der Wert n) einen Einfluss auf die Eigenschaften.
- $y = f(x) = a(x + u)^n$ für $u > 0$ eine Verschiebung nach links, für $u < 0$ eine Verschiebung nach rechts um den Betrag von u. Auch in diesem Fall ändern sich die Eigenschaften.

11.2. $y = f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{Z}^-$ und $n \leq -1$, „Hyperbel“

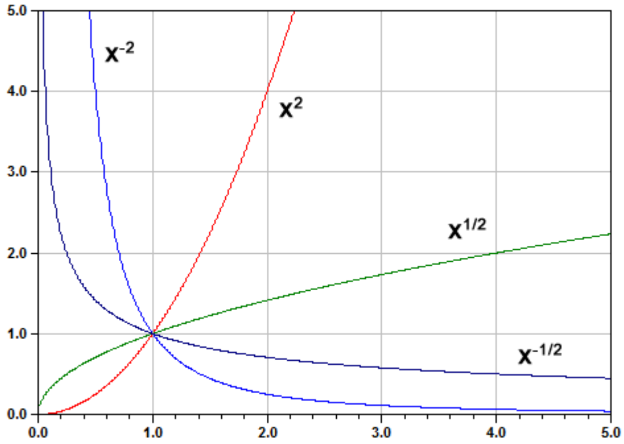


Ein paar Key Words:

- Bezüglich einer Multiplikation mit dem Faktor a, also für $y = f(x) = a \cdot x^n$ gelten ähnliche Überlegungen wie vorhin.
- Dito Addition mit d, also: $y = f(x) = a \cdot x^n + d$
- Dito Addition mit u, also: $y = f(x) = a(x + u)^n$

11.3. Allgemeine Funktion $y = f(x) = x^p$

Sobald p eine rationale oder reelle Zahl ausserhalb der natürlichen resp. ganzen Zahlen ist, so ist die Funktion $y = f(x) = x^p$ nur noch im 1. Quadranten definiert.



Es gibt nur 4 Fälle die betrachtet werden können:

i) $p > 1$ („Parabel"-Form)

ii) $0 < p < 1$ („Wurzel"-Form)

iii) $-1 < p < 0$

iv) $p \leq -1$ („Hyperbel"-Form)

12. Zusammengesetzte Potenzfunktionen

12.1. Polynom = rationale Funktion

I) Funktionen der Form $\mathbf{y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$, mit $a_n \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, heissen **Polynome n-ten Grades**.

II) Kurzschreibweise: $y = f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$

III) Die höchste Potenz heisst „Grad" des Polynoms.

IV) Die Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ sind beliebige, aber feste reelle Zahlen.

V) Das Polynom schneidet die y-Achse an der Stelle $y = a_0$.

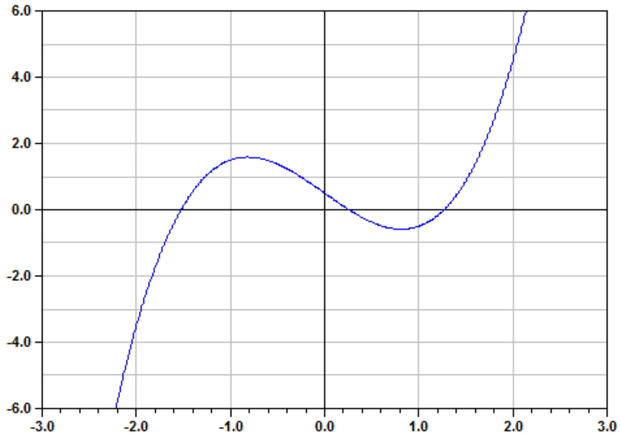
Beispiel 1: Es ist das Polynom $y = f(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ gegeben.

I) & III) $y = f(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, ist ein Polynom 3-ten Grades, da die höchste Potenz gleich 3 ist.

IV) Die Koeffizienten sind die folgenden konkreten Zahlen: $a_3 = 1$; $a_2 = 2$; $a_1 = -13$ und $a_0 = 10$

V) Schnittpunkt mit der y-Achse ist bei P(0; 10)

Beispiel 2: Es ist das Polynom $y = f(x) = x^3 - 2x + 0{,}5$ gegeben.



I) & III) Polynom 3-ten Grades

IV) $a_3 = 1$; $a_2 = 0$; $a_1 = -2$; $a_0 = 0{,}5$

V) P(0; 0,5)

Ein paar Key Words:

- Ein Polynom ist eine Zusammensetzung von Potenzfunktionen
- Die höchste Potenz heisst Grad des Polynoms
- Die Quadratische Funktion ist ein Polynom 2-ten Grades
- Ein Polynom n-ten Grades kann höchstens n verschiedene Nullstellen haben
- Ist n ungerade, so hat dieses Polynom mindestens eine Nullstelle
- Es gibt Polynome mit geradem Grad, die keine Nullstelle haben, z.B. $y = f(x) = x^2 + 4$
- Es kann lokale Maxima und Minima haben, siehe Beispiel 2: bei ca. x = -0,8 resp. bei ca. x=0,8

Wichtige Eigenschaften:

- DB = $\mathbb{R}$
- Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt $P(0; a_0)$
- f(x) hat höchstens n Nullstellen
- f(x) hat bei ungeradem n mindestens eine Nullstelle
- Der Graph von f(x) nähert sich mit wachsendem |x| dem Graphen der Funktion. $y = a_n x^n$
- Der Graph von f(x) kann für kleine |x| mit dem linearen Teil der Funktionsgleichung approximiert werden, im Beispiel 2 mit y = -2x + 0,5

12.2. Gebrochen rationale Funktion

Funktionen der Form $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{g(x)}}{\mathbf{h(x)}}$,
wobei g(x) und h(x) Polynome n-ten resp. m-ten Grades sind,
heissen **gebrochen rationale Funktionen**.

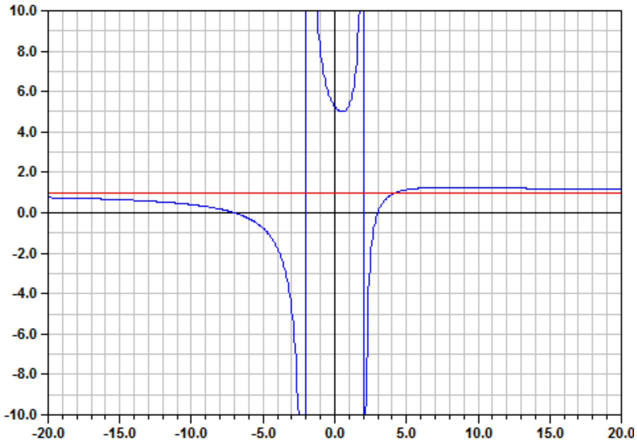
Bemerkung: $\mathbf{g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0}$

$h(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \cdots + b_1 x + b_0$

1) Definitionsbereich:	DB = ℝ\\{Nullstellen des Nenners}
2) Nullstellen:	Nullstellen des Zählers
3) Senkrechte Asymptoten:	Die senkrechten Asymptoten laufen zu 99% durch die Nullstellen des Nenners. Leider „nur“ zu 99.9%, denn wenn einer der Nullstellen des Nenners auch im Zähler vorkommt, dann wird diese aus dem Definitionsbereich zwar „verbannt“, aber es geht keine senkrechte Asymptote durch diesen Wert. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer „hebbaren Definitionslücke“.
4) Verhalten für grosse |x|:	**I) Waagrechte Asymptote (*):** Falls Grad des Zählers = Grad Nenner (n = m) Die Asymptote hat die Gleichung $y = \frac{a_n}{b_n}$ **II) x-Achse als Asymptote:** Falls Grad des Zählers < Grad Nenner (n < m) **III) schiefe Asymptote:** Falls Grad des Zählers um Eins grösser als Grad des Nenners ist. (n = m + 1) Die Gleichung der Asymptote wird mittels Polynomdivision ermittelt. **IV) keine Asymptote:** Falls n > m+ 1 (n > m + 1)
5) Schnittpunkt mit y-Achse:	S(0; f(0)); resp. $S\left(0; \frac{a_0}{b_0}\right)$

(*) Asymptote = eine Gerade, die sich an die Kurve anschmiegt.

Beispiel 1:



$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{x^2 + 4x - 21}}{\mathbf{x^2 - 4}}$$

<u>Grad:</u> Grad(g(x)) = 2 = n
Grad(h(x)) = 2 = m

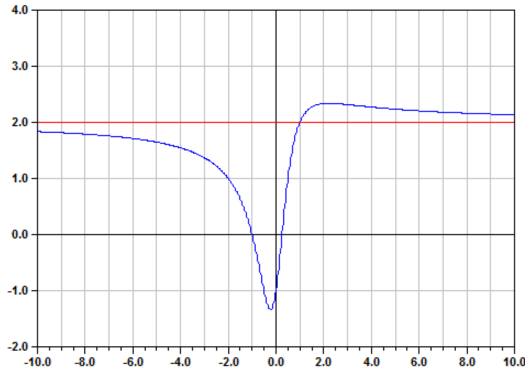
<u>Koeffizienten:</u> $a_2 = 1$; $a_1 = 4$; $a_0 = -21$
$b_2 = 1$; $b_1 = 0$; $b_0 = -4$

Ein paar Key Words:

- Eine gebrochen rationale Funktion ist eine Division von Polynomen.
- Die Nullstellen der gebrochen rationalen Funktion sind identisch mit den Nullstellen des Zählerpolynoms.
  <u>siehe Beispiel 1:</u> Die Nullstellen des Zählerpolynoms g(x) = $x^2 + 4x - 21$ sind die Werte $x_1 = -7$ und $x_2 = 3$. Es sind ebenfalls die Nullstellen der gebrochen rationalen Funktion f(x).
- Bei den Nullstellen des Nennerpolynoms ist die Funktion nicht definiert, da in diesem Fall mit Null dividiert würde. Also müssen die Nullstellen des Nennerpolynoms aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden.
  <u>siehe Beispiel 1:</u> Die Nullstellen des Nennerpolynoms h(x) = $x^2 - 4$ sind die Werte $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Somit lautet der Definitionsbereich der Funktion f(x) wie folgt: DB = $\mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$.
- Eine gebrochene rationale Funktion kann sogenannte Asymptote (= Geraden, die sich an die Kurve anschmiegen) besitzen.
- Es gibt 3 Typen von Asymptoten: horizontale, schiefe und vertikale.
  <u>siehe Beispiel 1:</u> Diese gebrochene rationale Funktion hat eine horizontale und 2 vertikale Asymptoten.

1) Definitionsbereich:	DB = $\mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$
2) Nullstellen:	$x_1 = -7$ und $x_2 = 3$
3) Senkrechte Asymptoten:	x = -2 und x = 2
4) Verhalten für grosse |x|:	I) Waagrechte Asymptote: da n = m: Gleichung $y = \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{1} = 1$
5) Schnittpunkt mit y-Achse:	$\mathrm{S}\left(0; \frac{\mathrm{a_0}}{\mathrm{b_0}}\right) = \mathrm{S}\left(0; \frac{-21}{-4}\right) = \mathrm{S}(0; 5{,}25)$

Beispiel 2:



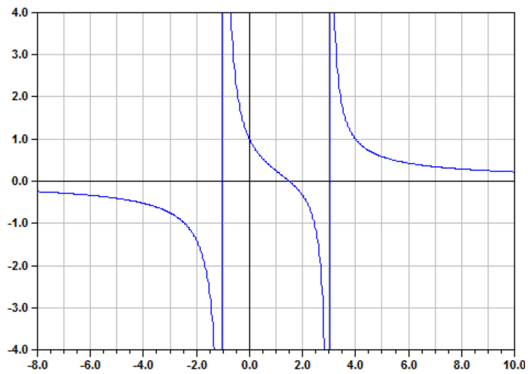
$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{4x^2 + 3x - 1}}{\mathbf{2x^2 + 1}}$$

<u>Grad:</u> Grad(g(x)) = 2 = n
Grad(h(x)) = 2 = m

<u>Koeffizienten:</u> $a_2 = 4$; $a_1 = 3$; $a_0 = -1$
$b_2 = 2$; $b_1 = 0$; $b_0 = 1$

1) Definitionsbereich:	DB = ℝ
2) Nullstellen:	$x_1 = -1$ und $x_2 = 0.25$
3) Senkrechte Asymptoten:	keine
4) Verhalten für grosse |x|:	I) Waagrechte Asymptote: da n = m: Gleichung $y = \frac{a_n}{b_n} = \frac{4}{2} = 2$
5) Schnittpunkt mit y-Achse:	$\mathrm{S}\left(0; \frac{a_0}{b_0}\right) = \mathrm{S}\left(0; \frac{-1}{1}\right) = \mathrm{S}(0; -1)$

Beispiel 3:



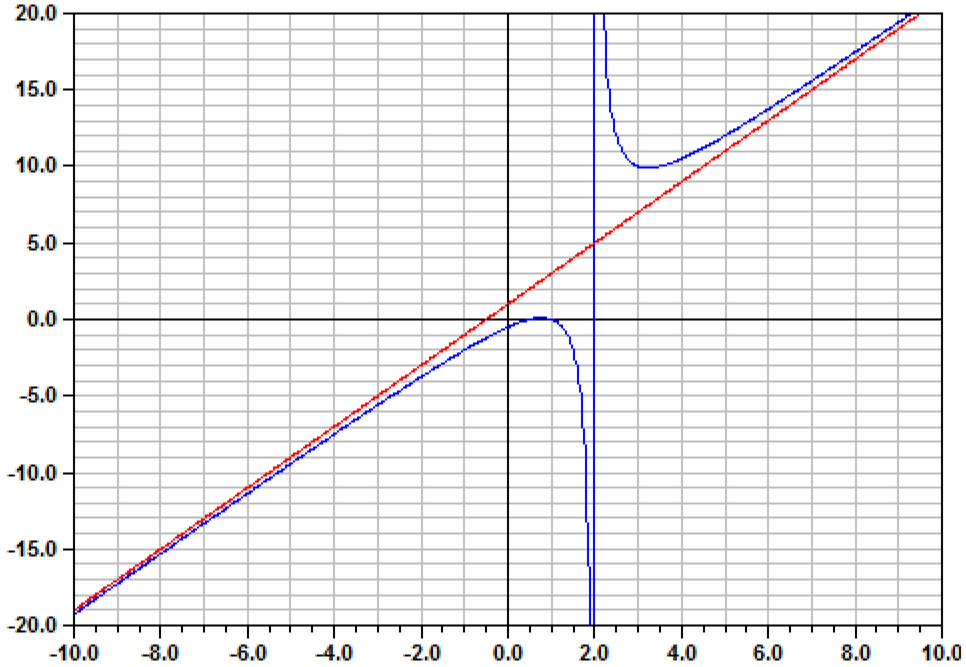
$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2x - 3}}{\mathbf{x^2 - 2x - 3}}$$

<u>Grad:</u> Grad(g(x)) = 1 = n
Grad(h(x)) = 2 = m

<u>Koeffizienten:</u> $a_1 = 2$; $a_0 = -3$
$b_2 = 1$; $b_1 = -2$; $b_0 = -3$

1) Definitionsbereich:	DB = ℝ\{-1; 3}
2) Nullstellen:	$x_1 = 1{,}5$
3) Senkrechte Asymptoten:	x = -1 und x = 3
4) Verhalten für grosse |x|:	II) x-Achse als Asymptote: da n < m
5) Schnittpunkt mit y-Achse:	$\mathrm{S}\left(0; \frac{a_0}{b_0}\right) = \mathrm{S}\left(0; \frac{-3}{-3}\right) = \mathrm{S}(0; 1)$

Beispiel 4:



$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2x^2 - 3x + 1}}{\mathbf{x - 2}}$$

<u>Grad:</u> Grad(g(x)) = 2 = n
Grad(h(x)) = 1 = m

<u>Koeffizienten:</u> $a_2 = 2$; $a_1 = -3$; $a_0 = 1$
$b_1 = 1$; $b_0 = -2$

1) Definitionsbereich:	DB = $\mathbb{R}\backslash\{2\}$
2) Nullstellen:	$x_1 = 1{,}5$ und $x_2 = 0{,}5$
3) Senkrechte Asymp-toten:	x = 2
4) Verhalten für gros-se |x|:	III) schiefe Asymptote: da n = m + 1: Gleichung $y = 2x + 1$ Berechnung mittels Polynomdivision (*)
5) Schnittpunkt mit y-Achse:	$S\left(0; \frac{a_0}{b_0}\right) = S\left(0; \frac{1}{-2}\right) = S(0; -0{,}5)$

(*) Polynomdivision: (x-2) ist als eine Nullstelle bekannt / gegeben.

$(2x^2 - 3x + 1) : (x - 2) = 2x + 1 + \text{Rest } 3$ (Rest 3 kann ignoriert werden für die Asymptote)

$\underline{-(2x^2 - 4x)}$

/ x + 1

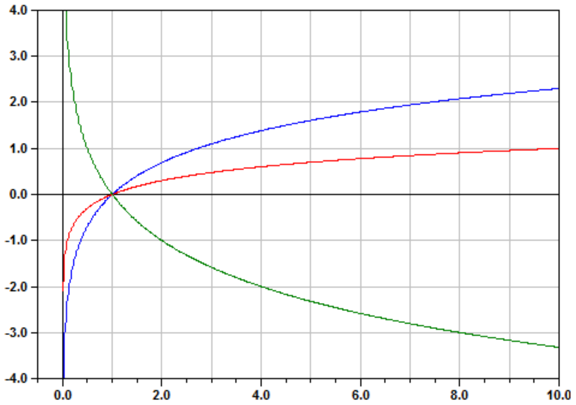
$\underline{-(x - 2)}$

/ +3

13. Logarithmusfunktion

13.1. Definition und Eigenschaften

Die Funktion der Form **y = f(x) = $\log_a(x)$** ($a \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\} = \mathbb{R}_+\setminus\{0,1\}$
heisst **Logarithmusfunktion zur Basis a**.



Blau: $y = \ln(x)$

Rot: $y = \log(x)$

Grün: $y = \log_{0,5}(x)$

Ein paar Key Words:

- Die Logarithmusfunktion y = f(x) = ln(x), resp. y = g(x) = lg(x), resp. y = h(x) = $\log_a(x)$ ist nur für positive x-Werte definiert, also DB = $\mathbb{R}_+^*$.
- Es werden alle y-Werte angenommen, somit ist der Wertebereich WB = R.
- Die x-Achse wird beim Wert x = 1 geschnitten, d.h. die Nullstelle ist immer x = 1.
- Die Logarithmusfunktion ist für a > 1 eine streng monoton wachsende Funktion (sie steigt immer an).
- Die Logarithmusfunktion ist für 0 < a < 1 eine streng monoton fallende Funktion (sie fällt stetig).
- Die Logarithmusfunktion y = h(x) = $\log_a(x)$ ist die Umkehrfunktion von y = a^x. Somit sind f(x) = ln(x) resp. g(x) = lg(x) die Umkehrfunktion von y = e^x resp. y = 10^x.
- Der der obige Punkt gilt auch umgekehrt, d.h. die Exponentialfunktion y = a^x hat als Umkehrfunktion y = $\log_a(x)$. Das gilt natürlich auch für die Spezialfälle a= 10 & a = e.

1) Definitionsbereich:	DB = $\mathbb{R}_+^*$ (nur positive Werte ohne 0)
2) Wertebereich:	WB = R (es werden alle y-Werte angenommen)
3) Nullstelle:	Genau eine Nullstelle, für jedes a ist x = 1 die Nullstelle.
4) Symmetrie:	$\log_a(x)$ & $\log_{\frac{1}{a}}(x)$ gehen mit Spiegelung an der x-Achse ineinander über.
5) Schnittpunkt mit y-Achse:	Keine Schnittpunkte
6) Monotonie:	Für a > 1 streng monoton steigend, und für 0 < a < 1 streng monoton fallend.
7) Asymptote:	y-Achse ist Asymptote
8) Umkehrfunktion:	g(x) = e^x ist Umkehrfunktion von f(x) = ln(x) h(x) = a^x ist Umkehrfunktion von i(x) = $\log_a(x)$

14. Zusammenstellung einiger Eigenschaften von Funktionen

14.1. Nullstellen

Die **Nullstellen** einer Funktion $y = f(x)$ sind diejenigen Werte für x_i, für die $f(x_i) = 0$ gilt.

Die Nullstellen der Funktion $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ sind die Lösungen der Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$.
Nullstellen: $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$

14.2. Monotonie

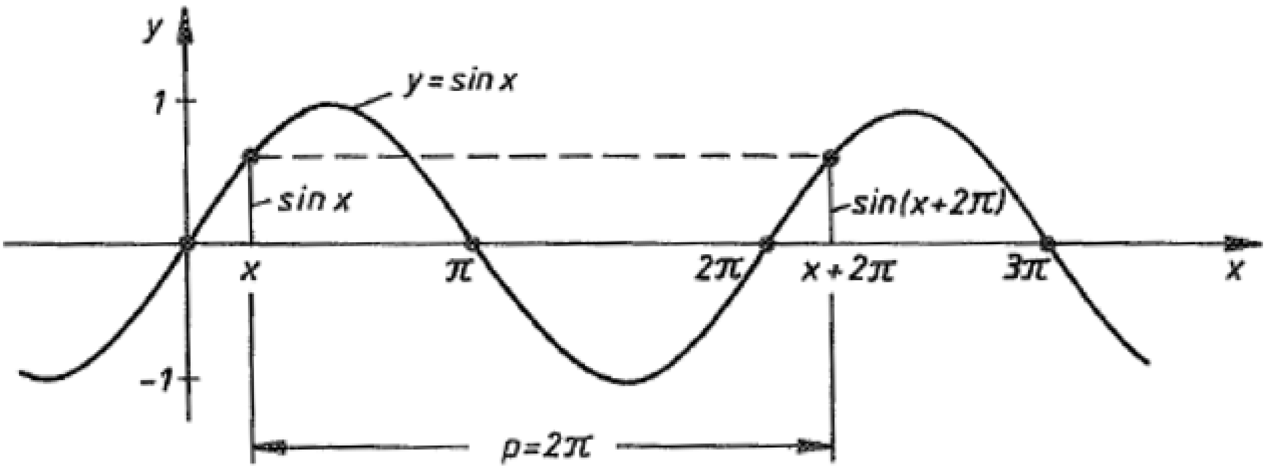
I) Wenn für **jedes Paar von Werten** x_1 und x_2 eines Intervalls I des Definitionsbereichs (wobei $x_1 < x_2$ gelten soll) einer Funktion $y = f(x)$,
so heisst diese Funktion

- i) monoton wachsend in I, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- ii) monoton fallend in I, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- iii) streng monoton wachsend in I, falls $f(x_1) < f(x_2)$,
- iv) streng monoton fallend in I, falls $f(x_1) > f(x_2)$,
- v) konstant in I, falls $f(x_1) = f(x_2)$.

II) Wenn obiges für den ganzen Definitionsbereich gilt, dann lässt man einfach den Zusatz „in I“ weg.

14.3. Periodizität

Eine Funktion $y = f(x)$ heisst **periodisch mit Periode p**,
wenn $\forall$ x $\in$ DB auch $x \pm p$ im DB liegt und $\mathbf{f(x \pm p) = f(x)}$ ist.



14.4. Symmetrien

I) Eine Funktion $y = f(x)$ heisst **gerade**, wenn $\forall\, x \in DB$ auch $-x$ im DB liegt und **$f(x) = f(-x)$** gilt. (Spiegelung an der y-Achse)

II) Eine Funktion $y = f(x)$ heisst **ungerade**, wenn $\forall\, x \in DB$ auch $-x$ im DB liegt und **$f(x) = -f(-x)$** resp. **$-f(x) = f(-x)$** gilt. (Punktspiegelung im Nullpunkt)

Interpretation:

Gerade Funktion: Wenn ein Punkt der Funktionskurve an der y-Achse gespiegelt wird, geht er wieder in einen Punkt der Funktionskurve über.

Ungerade Funktion: Wenn ein Punkt der Funktionskurve am Nullpunkt gespiegelt wird, geht er wieder in einen Punkt der Funktionskurve über.

Ablauf in Worten:

Gerade Funktion: Ersetze in der Funktionsgleichung x durch –x, vereinfache diese „neue“ Funktionsgleichung, die „neue“ Funktionsgleichung muss genau gleich sein wie die alte.

Gerade Exponenten: $f(x) = x^6 + 2x^4 - 3x^2 + 5$

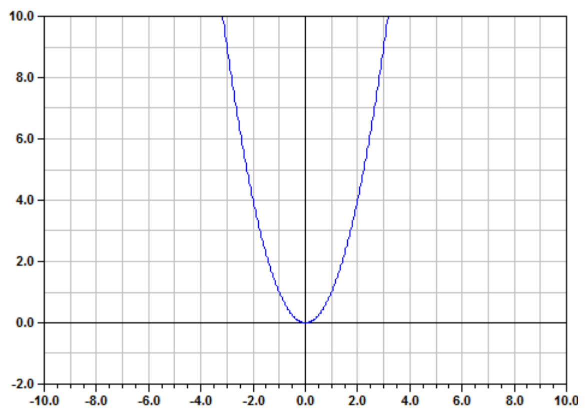
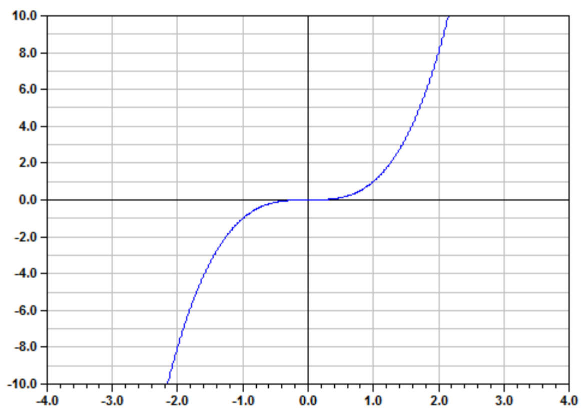
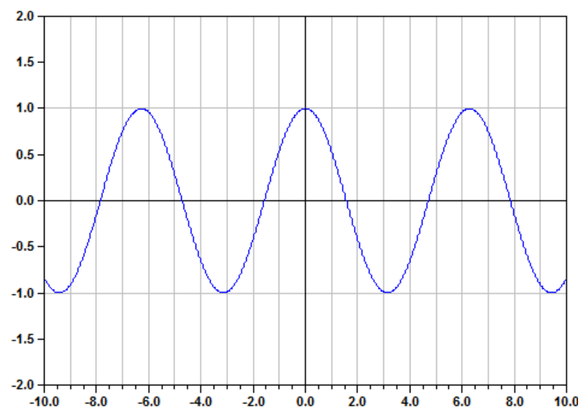
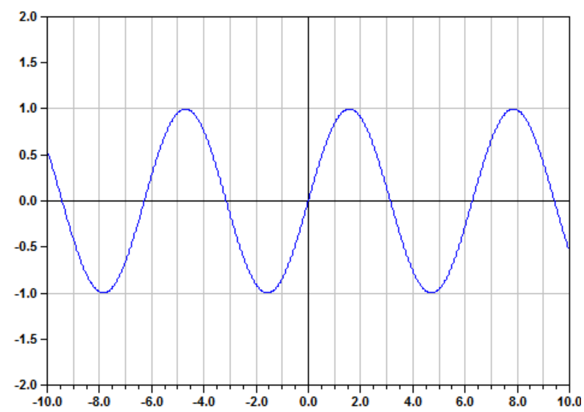
$f(-x) = (-x)^6 + 2\cdot(-x)^4 - 3\cdot(-x)^2 + 5 = x^6 + 2x^4 - 3x^2 + 5 = f(x)$

Ungerade Funktion: Ersetze in der Funktionsgleichung x durch –x, vereinfache diese „neue“ Funktionsgleichung, die „neue“ Funktionsgleichung muss gleich der alten mit (-1) multiplizierten sein.

Ungerade Exponenten: $f(x) = 3x^5 - 7x^3 + 7x$

$f(-x) = 3\cdot(-x)^5 - 7\cdot(-x)^3 + 7\cdot(-x) = -3x^5 + 7x^3 - 7x$

$= (-1)\cdot(3x^5 - 7x^3 + 7x) = (-1)\cdot f(x)$

Gerade Funktion	Ungerade Funktion
	
	

14.5. Umkehrbarkeit von Funktionen

Allgemeiner Algorithmus zur Bestimmung der Umkehrfunktion:

1) x und y werden miteinander vertauscht
2) x = f(y) wird nach y aufgelöst

Die Schritte 1) und 2) können auch miteinander vertauscht werden.

Beispiel 1: $y = f(x) = 2x + 3$

Schritte	Ausführung am Beispiel
1) Vertauschung von x und y	$y = 2x + 3$ wird zu $x = 2y + 3$
2) x = f(y) nach y auflösen	$y = f^{-1}(x) = h(x) = ½x - 1{,}5$

Beispiel 2: $y = f(x) = x^2$

Schritte	Ausführung am Beispiel
1) Vertauschung von x und y	$y = x^2$ wird zu $x = y^2$
2) x = f(y) nach y auflösen	$y = f^{-1}(x) = h(x) = \sqrt{x}$

Beispiel 3: $y = f(x) = \frac{1}{x}$

Schritte	Ausführung am Beispiel
1) Vertauschung von x und y	$y = \frac{1}{x}$ wird zu $x = \frac{1}{y}$
2) x = f(y) nach y auflösen	$y = f^{-1}(x) = h(x) = \frac{1}{x}$ d.h. $f(x) = f^{-1}(x)$

Wichtige Eigenschaften zusammengefasst:

A) Umkehrbarkeit von Funktionen

Nur streng monotone Funktionen, resp. streng monotone Abschnitte von Funktionen können umgekehrt werden.

i) Die ganze lineare Funktion $y = mx + b$ kann invertiert werden. Die inverse Funktion ist wiederum eine lineare Funktion.
ii) Von der quadratischen Funktion kann nur ein Parabelast invertiert werden. Die Umkehrfunktion ist eine Wurzelfunktion.
iii) Die Hyperbel kann im ganzen Definitionsbereich invertiert werden, die Umkehrfunktion ist wiederum eine Hyperbel.
iv) Sowohl die Logarithmusfunktion wie Exponentialfunktion können im ganzen Definitionsbereich invertiert werden. Die eine Funktion ist die Umkehrfunktion der anderen.
v) Die Trigonometrischen Funktionen können nur innerhalb eines kleinen Bereichs invertiert werden.
vi) Das gilt für viele weiteren Funktionen, wie z.B. die Polynome und gebrochen rationalen Funktionen.

B) Definitions- und Wertebereich

Beim Umkehren wird der Definitionsbereich der ursprünglichen Funktion zum Wertebereich der invertierten Funktion, der Wertebereich der ursprünglichen Funktion wird zum Definitionsbereich der invertierten Funktion.

C) Graphisch

Graphisch bedeutet das Bilden der Inversen einer Funktion, die Spiegelung der Funktion an der Geraden $y = x$ (1. Winkelhalbierende). Dieses Spiegeln rührt vom Vertauschen von x und y her.

15. Erweiterung des Funktionsbegriffes

15.1. Von einer Funktion zur anderen

Gegeben sei die Funktion f(x). Wie ergibt sich g(x) aus f(x)?

g(x)	g(x) ergibt sich aus f(x)…
1) g(x) = f(-x)	durch Spiegelung an der y-Achse
2) g(x) = -f(x)	durch Spiegelung an der x-Achse
3) g(x) = -f(-x)	durch Spiegelung an der y-Achse und an der x-Achse (Reihenfolge ist unwichtig).
4) g(x) = f(x) + d	durch Verschiebung entlang der y-Achse: d > 0: nach oben d < 0: nach unten
5) g(x) = f(x + c) (*)	durch Verschiebung entlang der x-Achse: c > 0: nach links c < 0: nach rechts
6) g(x) = a · f(x)	durch Multiplikation von f(x) mit a.

(*) $y = g(x) = (x + c)^2$. Wenn wir nun c = 1, c = -3 wählen, so ist $f(x) = (x + 1)^2$ eine Verschiebung der Normalparabel nach links um 1. Hingegen ist $f(x) = (x – 3)^2$ eine Verschiebung der Normalparabel nach rechts um 3.
In vielen Büchern wird die Verschiebung mit g(x) = f(x – c) angegebene. Dann sind die Verschiebungen natürlich genau gegenteilig, also für c > 0 eine Verschiebung nach rechts und für c < 0 eine Verschiebung nach links.

15.2. Funktionen miteinander addieren oder multiplizieren

Funktionen können wir natürlich auch miteinander addieren und multiplizieren.

Seien f(x) und g(x) zwei Funktionen mit Definitionsbereich D_f und D_g. Dann versteht man unter der Summe, resp. Produkt von zwei Funktionen diejenige Funktion die durch die punktweise Addition, resp. Multiplikation der zwei Funktionen hervorgeht.

Regel	Definitionsbereich
1) (f + g) · (x) = f(x) + g(x)	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
2) (f – g) · (x) = f(x) – g(x)	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
3) (f · g) · (x) = f(x) · g(x)	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
4) $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{f/g} = D_f \cap D_g$ und $g(x) \neq 0$

16. Extremalwertaufgaben mit Nebenbedingungen

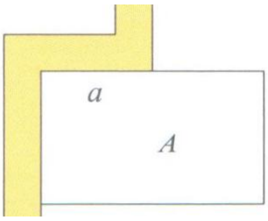
Eine Extremalstelle ist eine Stelle, bei welcher der Funktionswert extremal, das heisst, maximal oder minimal wird.

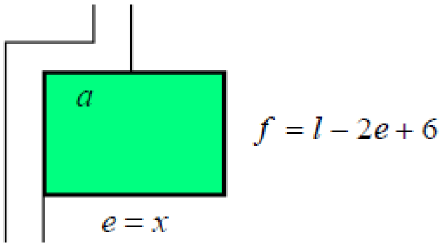
Quadratische Funktionen haben entweder **ein Maximum** oder **ein Minimum**. Dieser **Extremalwert** ist immer der **Scheitelpunkt**.

Beispiel 1:

Eine rechteckige Weidenfläche wird von zwei Mauern mit a = 6m und einem 50m langem Zaun begrenzt (siehe Zeichnung).

Wie gross ist die maximale Weidenfläche und wie gross ist die Länge und die Breite des Rechteckes?





Geg: l = 50[m]; a = 6[m]
Ges: e = ?[m]; f = ?[m]

Lösung:

$A = e \cdot f = x \cdot (l - 2x + 6) = 50x - 2x^2 + 6x = -2x^2 + 56x$

$A(x) = -2x^2 + 56x$

$$S(x;A) = S\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right) = S\left(-\frac{56}{2 \cdot -2}; 0 - \frac{56^2}{4 \cdot -2}\right) = S(14; 395)$$

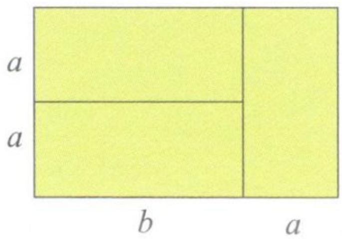
Resultat:

$e = 14[m]$; $A = 395[m]$; $f = \frac{A}{e} = 28[m]$

Beispiel 2:

Mit einem Zaun der Länge u soll ein Rechteck eingezäunt und in drei Rechtecke unterteilt werden.

Für welche Abmessungen a und b wird die ganze Rechteckfläche maximal und wie gross ist diese Rechteckfläche?



Geg: u
Ges: a = ?; b = ?; F = ?

Lösung:

Grosses Rechteck: Breite c = 2a; Länge d = a + b

Zaunlänge: $u = 8a + 3b \Rightarrow b = \frac{u-8a}{3} \Rightarrow d = a + \frac{u-8a}{3} = \frac{3a}{3} + \frac{u-8a}{3} = \frac{3a+u-8a}{3} = \frac{u-5a}{3}$

$$A = c \cdot d = 2a \cdot \frac{u-5a}{3} = \frac{2a \cdot (u-5a)}{3} = \frac{2au - 10a^2}{3} = A(a)$$

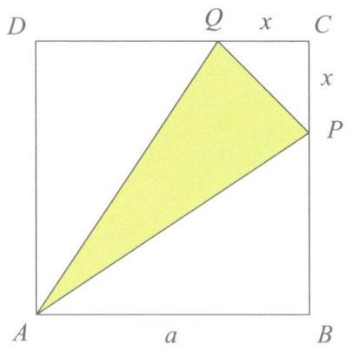
$$S(a;A) = S\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right) = S\left(-\frac{\frac{2u}{3}}{2 \cdot -\frac{10}{3}}; 0 - \frac{\frac{4u^2}{9}}{4 \cdot -\frac{10}{3}}\right) = S\left(\frac{u}{10}; \frac{u^2}{30}\right)$$

Resultat:

$$a = \frac{u}{10};\ A = \frac{u^2}{30};\ b = \frac{u-8a}{3} = \frac{u - 8 \cdot \frac{u}{10}}{3} = \frac{0{,}2u}{3} = \frac{u}{15}$$

Beispiel 3:

Ein Quadrat ABCD hat die Seitenlänge a = 10cm. Trägt man von der Ecke C auf beiden Seiten jeweils die Länge x ab, so erhält man die Punkte P und Q.



Für welchen Wert hat das Dreieck APQ den grössten Flächeninhalt und wie gross ist dieser?

Geg: a = 10[cm]
Ges: x = ?[cm]; A = ?[m^2]

Lösung:

$$A = a^2 - 2\left(\frac{a \cdot (a-x)}{2}\right) - \frac{x^2}{2} = 10^2 - 2 \cdot \frac{10 \cdot (10-x)}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$= 100 - 2\left(\frac{100 - 10x}{2}\right) - \frac{x^2}{2} = 100 - 100 + 10x - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 10x$$

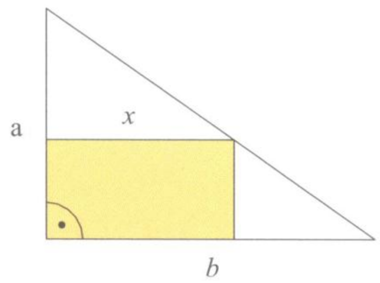
$$A(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 10x$$

$$S(x; A) = S\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right) = S\left(-\frac{10}{2 \cdot -\frac{1}{2}}; 0 - \frac{10^2}{4 \cdot -\frac{1}{2}}\right) = S(10; 50)$$

Resultat:
x = 10[cm]; A = 50[cm^2]

Beispiel 4:

Aus einer dreieckigen Steinplatte mit a = 0.4m und b = 0.6m soll eine rechteckige Platte mit der Länge x herausgesägt werden.



Wie muss x gewählt werden, damit die Fläche der rechteckigen Platte möglichst gross wird? Wie breit ist das Rechteck?

Geg: a = 0.4[m]; b = 0.6[m]
Ges: x = ?[m]; y = ?[m]; A = ?[m^2]

Lösung:
Wegen dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{y}{a} = \frac{b-x}{b} \Rightarrow b \cdot y = a \cdot (b-x) \Rightarrow y = \frac{a \cdot (b-x)}{b}$$

$$A = x \cdot y = x \cdot \frac{a \cdot (b-x)}{b} = x \cdot \frac{ab - ax}{b} = x \cdot \frac{0.24 - 0.4x}{0.6} = \frac{0.24x - 0.4x^2}{0.6} = 0.4x - \frac{2}{3}x^2$$

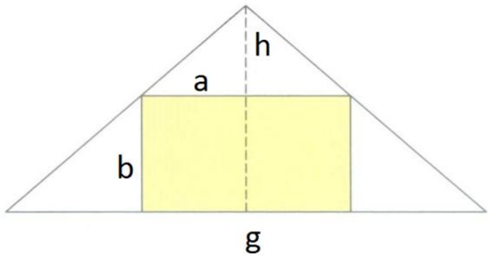
$$A(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 0.4x$$

$$S(x; A) = S\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right) = S\left(-\frac{0.4}{2 \cdot -\frac{2}{3}}; 0 - \frac{0.4^2}{4 \cdot -\frac{2}{3}}\right) = S(0.3; 0.06)$$

Resultat:
x = 0.3[m]; A = 0.06[m^2]; $b = \frac{A}{x} = \frac{0.06}{0.3} = 0.2[m]$

Beispiel 5:

Im Dachgeschoss eines Hauses soll ein Atelier mit möglichst viel Tageslicht eingerichtet werden. Im Hausgiebel mit der Grundlinie g = 8m und der Höhe h = 3.5m wird eine rechteckige Glaswand eingebaut.



Wie muss die Länge a und die Breite b der Glaswand gewählt werden, damit möglichst viel Licht einfällt?

Geg: g = 8[m]; h = 3.5[m]
Ges: a = ?[m]; b = ?[m]

Lösung:
Wegen dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{a}{2}:\frac{g}{2}=\frac{h-b}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2}\cdot h=\frac{g}{2}\cdot(h-b) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2}=\frac{\frac{g}{2}\cdot(h-b)}{h}$$

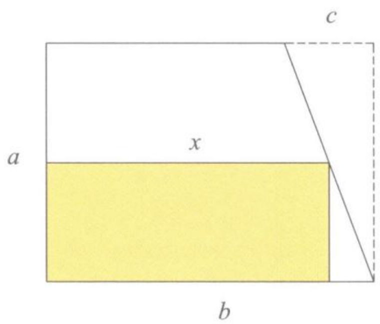
$$A=b\cdot\frac{a}{2}=b\cdot\frac{\frac{g}{2}\cdot(h-b)}{h}=b\cdot\frac{4\cdot(3.5-b)}{3.5}=\frac{14b-4^2}{3.5}=-\frac{4}{3.5}b^2-4b=A(b)$$

$$S(b;A)=S\left(-\frac{b}{2a};c-\frac{b^2}{4a}\right)=S\left(-\frac{4}{2\cdot-\frac{4}{3.5}};0-\frac{4^2}{4\cdot-\frac{4}{3.5}}\right)=S(1.75;3.5)$$

Resultat:
b = 1.75[m]; A = 2 · 3.5 = 7[m^2]; $a=\frac{A}{b}=\frac{7}{1.75}=4[m]$

Beispiel 6:

Aus einer Trapezförmigen Tischplatte mit a = 0.8m, b = 1.2 und c = 0.4m soll ein Rechteck mit der Länge x herausgesägt werden.



Wie muss x gewählt werden, dass die Fläche der rechteckigen Platte möglichst gross wird? Wie breit ist das Rechteck?

Geg: a = 0.8[m]; b = 1.2[m]; c = 0.4[m]
Ges: x = ?[m]; y = ?[m]; A = ?[m^2]

Lösung:
Wegen dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{c}{a}=\frac{b-x}{y}\Rightarrow y\cdot c=a\cdot(b-x)\Rightarrow y=\frac{a\cdot(b-x)}{c}$$

$$A=x\cdot y=x\cdot\frac{a\cdot(b-x)}{c}=x\cdot\frac{0.8\cdot(1.2-x)}{0.4}=x\cdot\frac{0.96-0.8x}{0.4}=\frac{0.96-0.8x^2}{0.4}$$

$$A(x)=-2x^2+2.4x$$

$$S(b;A)=S\left(-\frac{b}{2a};c-\frac{b^2}{4a}\right)=S\left(-\frac{2.4}{2\cdot-2};0-\frac{2.4^2}{4\cdot-2}\right)=S(0.6;0.72)$$

Resultat:
Die grösste mögliche Fläche mit diesen Massen ist bei x = 0.8m, y = 0.8m & F = 0.64m^2.

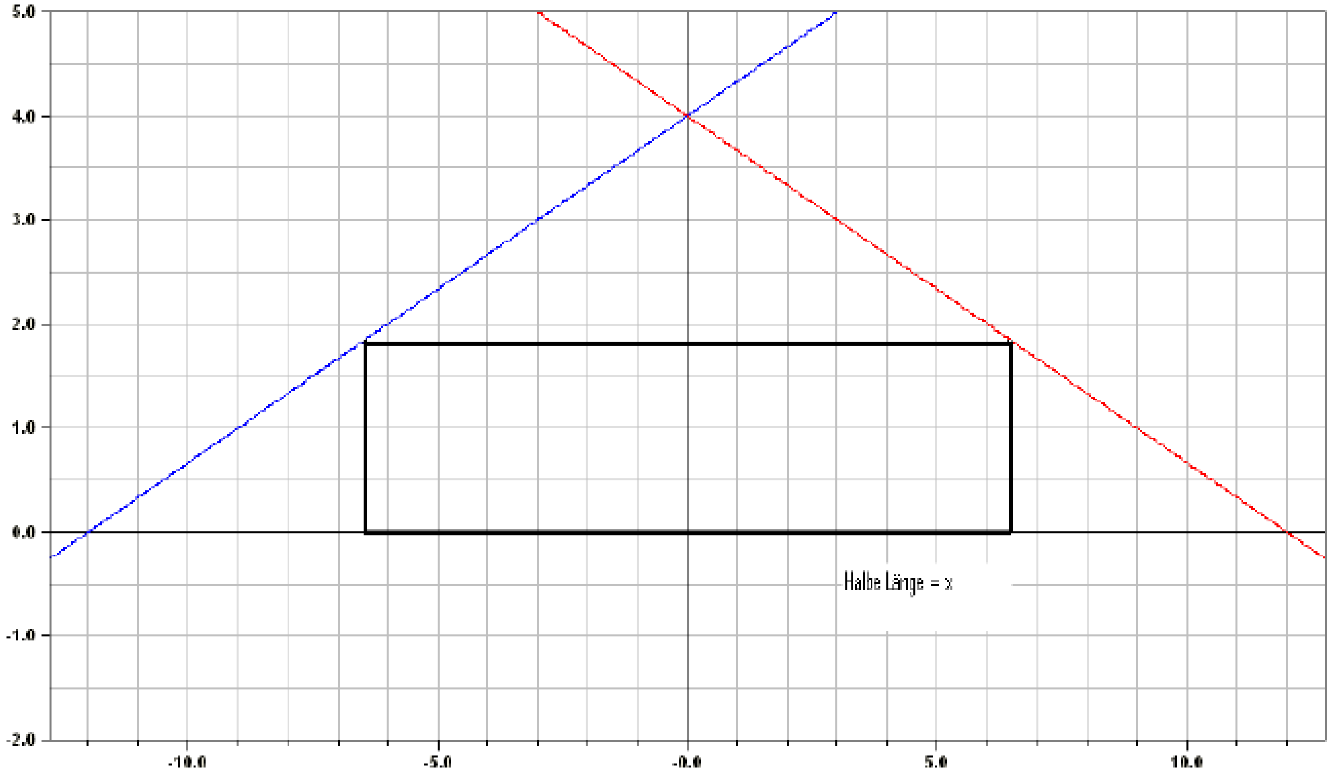
Bemerkung:
Die mit dem Scheitelpunkt ausgerechnete Lösung ergibt x = 0.6m und y = 1.2m. Da y anhand der Tischabmessungen aber maximal 0.8m sein kann, ist die erhaltene Lösung eine Scheinlösung. Die Tischplattenabmessung sind gegeben und können nicht geändert werden.

Beispiel 7:

Die 3 Geraden $y = f(x) = -\frac{1}{3}x + 4,\ \ y = g(x) = \frac{1}{3}x + 4$ und die x-Achse bilden ein Dreieck.

Diesem Dreieck ist ein Rechteck mit maximaler Fläche einzuzeichnen. Bestimmen Sie die Länge, Breite und Fläche des eingeschriebenen Rechtecks.

Lösung:



Schritt 1: Bezeichnung von Länge und Breite
Wir bezeichnen mit x die halbe Länge des Rechtecks. Wegen der Achsensymmetrie beträgt die Länge des Rechtecks 2x.
Die Breite (Höhe) des Rechtecks ist abhängig von x und berechnet sich mit der Funktion
$y = f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$

Schritt 2: Formulierung der Fläche
Die Fläche in Abhängigkeiten von x lautet: $y = F(x) = 2x \cdot \left(-\frac{1}{3}x + 4\right) = -\frac{2}{3}x^2 + 8x$

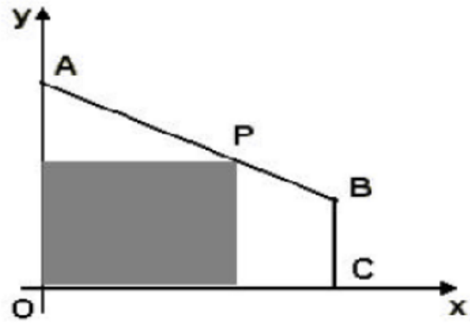
Schritt 3: Berechnen des Scheitelpunktes von y = F(x).

$$S\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right) = S\left(-\frac{8}{2 \cdot -\frac{2}{3}}; 0 - \frac{8^2}{4 \cdot -\frac{2}{3}}\right) = S(6; 24)$$

Resultat:
Die Länge des Rechtecks beträgt 12 LE, die Höhe -1/3*6+4 = 2 LE und die Fläche 24 FE.

Beispiel 8:

Aus dem rechtwinkligen Trapez OABC soll ein möglichst grosses Rechteck so ausgeschnitten werden, dass P auf AB liegt (siehe Zeichnung).



Berechnen Sie die Koordinaten von P aus A(0/7) und B(8/2). Berechnen Sie zudem die Fläche und begründen Sie, warum die gefundene Fläche maximal und nicht minimal ist.

Lösung:
Schritt 1: Bestimmen der Geraden durch die Punkte A und B.
Einsetzen der Punkte A(0/7) und B(8/2) in die 2-Punkte-Form:

$$\frac{y2-y1}{x2-x1}=\frac{y-y1}{x-x1} \Rightarrow \frac{2-7}{8-0}=\frac{y-7}{x-0} \Rightarrow \frac{y-7}{x}=-\frac{5}{8} \Leftrightarrow y=-\frac{5}{8}x+7$$

Schritt 2: Bestimmen des allgemeinen Flächeninhaltes.
Angenommen der Punkt P habe die Koordinaten P(x/y), dann lautet der Flächeninhalt des eingezeichneten Rechtecks: $A(x)=x\cdot y=x\left(-\frac{5}{8}x+7\right)=-\frac{5}{8}x^2+7x$

Schritt 3: Bestimmen des Scheitelpunktes.

$$S\left(-\frac{b}{2a};c-\frac{b^2}{4a}\right)=S\left(-\frac{7}{2\cdot-\frac{5}{8}};0-\frac{7^2}{4\cdot-\frac{5}{8}}\right)=\left(\frac{56}{10};\frac{98}{5}\right)=S(5.6;19.6)$$

Schritt 4: Bestimmen der Koordinaten des Punktes P und bestimmen der Fläche.

$$y=-\frac{5}{8}\cdot 5.6+7=3.5$$

Also lautet die Fläche A = 5.6 · 3.5 = 19.6 (was mit der y-Koordinate des Scheitelpunktes übereinstimmt.)

Resultat:
Die Koordinaten des Punktes P lauten P(5.6/3.5), die Fläche beträgt 19.6 FE und die Fläche ist maximal, da die zugrunde gelegte quadratische Funktion nach unten geöffnet ist (a = -5/8 < 0), und der Scheitelpunkt somit ein Maximum beschreibt.

17. Betriebswirtschaftliche Funktionen & Ökonomische Modelle

17.1. Kosten-, Erlös- & Gewinnfunktion

Funktion	Beschreibung in Prosa	Beschreibung in math. Form	Einheit
Erlösfunktion E(x)	Erlös = Menge mal Stückpreis	$E(x) = x \cdot p(x)$ Falls der Preis p konstant ist, dann gilt: $p(x) = p$. Also: $E(x) = x \cdot p$ (Siehe *)	GE
Gewinnfunktion G(x)	Gewinn = Erlös - Kosten	$G(x) = E(x) – K(x)$	GE
Gewinn pro Menge		$g(x) = \frac{G(x)}{x} = \frac{E(x) - K(x)}{x}$	GE
Kostenfunktion K(x)	Kosten = variable Kosten + fixe Kosten	$K(x) = K_v(x) + K_f$	GE
Bei quadratischer Kostenfunktion $K(x) = ax^2 + bx + c$ gilt:		$K_v(x) = ax^2 + bx$ $K_f = c$	
Variable Stückkosten $k_v(x)$	Kosten pro Mengeneinheit	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$	GE/ME
Bei quadratischer Kostenfunktion K(x) gilt:		$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{ax^2 + bx}{x} = ax + b$	
Deckungsbeitrag D	Deckung = Erlös – variable Kosten	$D(x) = E(x) – K_v(x)$	GE
Durchschnittlicher Deckungsbeitrag d	Deckungsbeitrag pro Mengeneinheit	$d(x) = \frac{D(x)}{x} = \frac{E(x) - K_v(x)}{x}$	GE/ME
Nutzenschwelle, Gewinnschwelle (Break-even-Point)	Ab dieser Menge wird ein Gewinn erwirtschaftet	$G(x) = 0$ oder $E(x) = K(x)$ Erste Nullstelle der Gewinnfunktion.	ME
Nutzengrenze	Ab dieser Menge wird kein Gewinn mehr erwirtschaftet.	$G(x) = 0$ oder $E(x) = K(x)$ Zweite Nullstelle der Gewinnfunktion.	ME
Gewinnmaximale Menge	Menge bei der der Gewinn maximal wird.	x_{Gopt}	ME
Gewinnoptimale Menge bei quadratischer Gewinnfunktion:		x-Koordinate des Scheitelpunktes	ME
Maximaler Gewinn	Der höchstmögliche Gewinn.	$G_{max} = G(x_{Gopt})$	GE
Maximaler Gewinn bei quadratischer Gewinnfunktion:		y-Koordinate des Scheitelpunktes	GE
Erlösmaximal Menge	Menge bei der der Erlös maximal wird.	x_{Eopt}	ME
Erlösoptimale Menge bei quadratischer Erlösfunktion:		x-Koordinate des Scheitelpunktes	ME
Maximaler Erlös	Der höchstmögliche Erlös.	$E_{max} = E(x_{Eopt})$	GE
Maximaler Erlös bei quadratischer Erlösfunktion:		y-Koordinate des Scheitelpunktes	GE

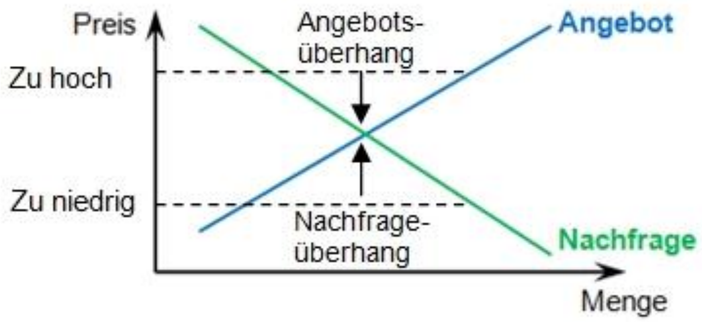
(*) Im Falle der vollkommenen Konkurrenz ist der Preis für das einzelne Unternehmen konstant, d.h. $E(x) = x \cdot p$. Im Falle des Monopols wird die Preisfunktion p(x) der Preis-Absatz-Funktion gleichgesetzt, $E(x) = x \cdot p(x)$.

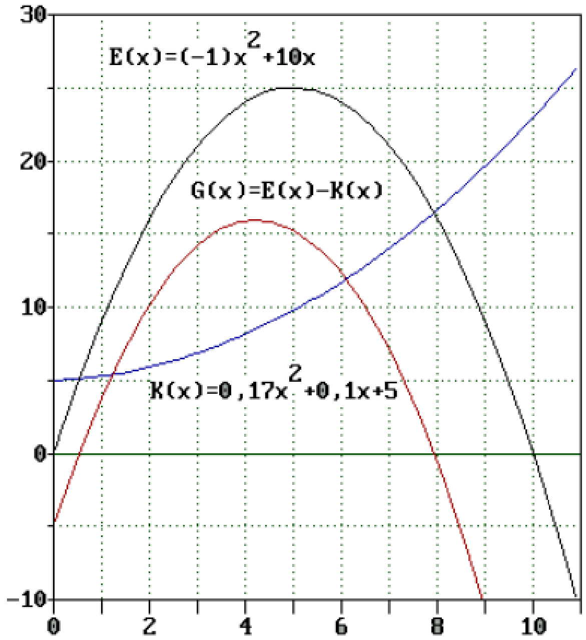
17.2. Die Angebots- und Nachfragefunktion

Funktion	Beschreibung in Prosa	Beschreibung in math. Form	Einheit
Angebotsfunktion	„Je teurer, desto mehr wird angeboten“ (Verhalten des Produzenten)	$p_A(x)$	
Nachfragefunktion	„Je teurer, desto weniger wird nachgefragt“ (Verhalten des Konsumenten)	$p_N(x)$	
Marktgleichgewicht	Schnittpunkt der Nachfrage- und Angebotsfunktion	$pN(x) = pA(x) \Rightarrow S(x_G; p_G)$	
Marktmenge	x-Koordinate des Marktgleich-gewichtes	x_G	ME
Marktpreis	y-Koordinate des Marktgleich-gewichtes	p_G	GE/ME
Nachfrageüberhang Markteingriff: Festlegen eines Höchstpreises $p < p_G$	Es wird mehr nachgefragt als angeboten, resp. es wird weniger produziert als nachgefragt. Bedingung: Der (vom Staat) festgelegte Preis ist tiefer als der Marktpreis.	$x(p_N) – x(p_A)$ für $p_N = p_A < p_G$	ME
Angebotsüberhang Markteingriff: Festlegen eines Mindestpreises $p > p_G$	Es wird weniger nachgefragt als angeboten, resp. es wird mehr produziert als nachgefragt. Bedingung: Der (vom Staat) festgelegte Preis ist höher als der Marktpreis.	$x(p_A) - x(p_N)$ für $p_N = p_A > p_G$	ME
Höchstpreis	Der Preis, ab dem das Produkt nicht mehr gekauft wird. Dies entspricht der y-Koordinate des Schnittpunktes mit der Nachfragekurve.	$p_N(0)$	GE/ME
Sättigungsmenge	Es wird nicht mehr abgesetzt (konsumiert), selbst wenn das Produkt gratis ist. Dies entspricht der Nullstelle der Nachfragekurve.	$p_N(x) = 0 \Rightarrow x = \ldots$	ME
Angebotsfunktion bei Steuer s Markteingriff: Erheben einer Steuer	Addition um die Konstante s (Angebotsfunktion wird um s nach oben verschoben; neues Marktgleichgewicht entsteht).	$p_A(x)' = p_A(x) + s$	
Angebotsfunktion bei Subvention s Markteingriff: Gewähren einer Subvention	Subtraktion um die Konstante s (Angebotsfunktion wird um s nach unten verschoben; neues Marktgleichgewicht entsteht).	$p_A(x)' = p_A(x) - s$	

17.3. Angebots- & Nachfrageüberhang / Gewinn- & Erlösfunktion - Grafiken

Angebots- & Nachfrageüberhang **Gewinn- & Erlösfunktion**

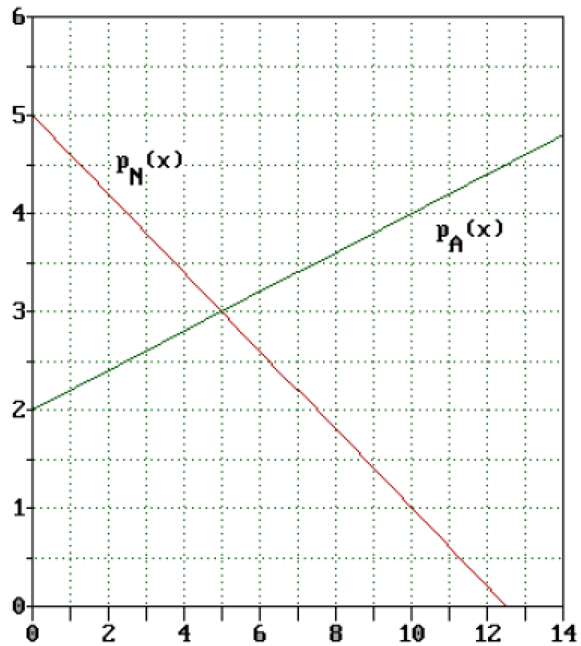




17.4. Verschiedene Aufgaben

<u>Aufgabe 1:</u>

Wir betrachten die nebenstehende Grafik und verifizieren die untenstehenden Aussagen.



1) Die x-Koordinate hat die Einheit ME (Mengeneinheit).
   Die y- resp. p-Koordinate GE/ME (Geldeinheit pro Mengeneinheit; M.a.W. Stückpreis).

2) „Je grösser der Preis, desto weniger wird nachgefragt"; d.h. eine Nachfragefunktion ist in der Regel monoton fallend. Die Nachfragefunktion lautet: $p_N(x) = -0.4x + 5$.

3) „Je grösser der Preis, desto mehr wird angeboten"; d.h. eine Angebotsfunktion ist in der Regel monoton steigend. Die obige Angebotsfunktion lautet: $p_A(x) = 0.2x + 2$.

4) Aus den Betrachtungen in 2) und 3) wird ersichtlich, dass der Preis p die unabhängige und die Menge x die abhängige Variable ist. Und trotzdem schreiben wir $p = p(x)$, obwohl wir eigentlich $x = x(p)$ schreiben müssten.

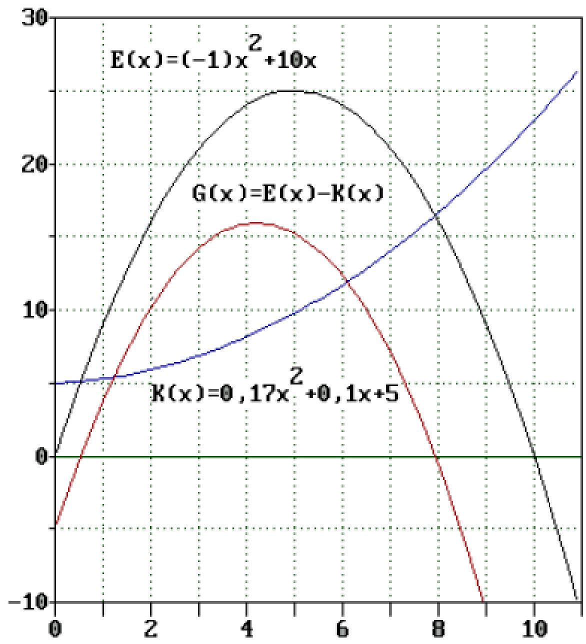
Aufgaben:

a) Was sagt der Punkt (10; 1) aus?
b) Was sagt der Punkt (0; 5) aus?
c) Was sagt der Punkt (12,5 ; 0) aus?
d) Was sagt der Punkt (4; 2,8) aus?
e) Was sagt der Punkt (0; 2) aus?
f) Der Schnittpunkt der beiden Funktionen heisst „Marktgleichgewicht". Die x-Koordinate heisst „Gleichgewichtsmenge" xG, die p-Koordinate „Marktpreis" pG. S(xG; pG) = (____ ; ____)
g) Wie viel würde zu einem Preis von Fr 4.-/Stk. produziert?
Wie viel verkauft?
Wie viel mehr würde produziert als verkauft?
Wie gross ist demnach der Angebotsüberhang?
Der Angebotsüberhang ist ins Diagramm einzuzeichnen.
Wie rechnen Sie die obigen Mengen mit der Funktionsgleichung?
h) Wie viel würde zu einem Preis von Fr 2,50/Stk. produziert?
Wie viel verkauft?
Wie viel mehr würde verkauft als produziert?
Wie gross ist demnach der Nachfrageüberhang?
Der Nachfrageüberhang ist ins Diagramm einzuzeichnen.
Wie rechnen Sie die obigen Mengen mit der Funktionsgleichung?

Lösungen:

a) Der Punkt (10; 1) sagt aus, dass bei einem Preis von 1 GE/ME 10 ME nachgefragt werden.
b) Der Punkt (0; 5) sagt aus, dass bei einem Preis von 5 GE/ME das Produkt nicht mehr nachgefragt (sprich: „gekauft") wird. Dieser Preis heisst Höchstpreis des Produktes.
c) Der Punkt (12,5; 0) sagt aus, dass selbst wenn das Produkt gratis ist, „nur" 12,5 ME nachgefragt werden. Diese Menge heisst Sättigungsmenge des Produktes.
d) Der Punkt (4; 2,8) sagt aus, dass bei einem Preis von 2,8 GE/ME 4 ME angeboten werden.
e) Der Punkt (0; 2) sagt aus, dass zu einem Stückpreis von 2 GE/ME nichts angeboten wird.
f) $S(x_G; p_G) = (5; 3)$
g) Wie viel würde zu einem Preis von Fr 4.-/Stk. produziert? 10 ME
Wie viel verkauft? 2.5 ME
Wie viel mehr würde produziert als verkauft? 10 ME – 2.5 ME = 7.5 ME
Wie gross ist demnach der Angebotsüberhang? 7.5 ME
Der Angebotsüberhang ist ins Diagramm einzuzeichnen.
  Der Angebotsüberhang wird mit der entsprechenden horizontalen Strecke zwischen den Funktionen gezeichnet, sie befindet sich oberhalb des Schnittpunktes.
Wie rechnen Sie die obigen Mengen mit der Funktionsgleichung?
  Durch Auflösen nach x der Gleichung $4 = 0.2x + 2$ resp. $4 = -0.4x + 5$.
h) Wie viel würde zu einem Preis von Fr 2,50/Stk. produziert? 2.5 ME
Wie viel verkauft? 6.25 ME
Wie viel mehr würde verkauft als produziert? 6.25 ME – 2.5 ME = 3.75 ME
Wie gross ist demnach der Nachfrageüberhang? 3.75 ME
Der Nachfrageüberhang ist ins Diagramm einzuzeichnen.
  Der Nachfrageüberhang wird mit der entsprechenden horizontalen Strecke zwischen den Funktionen gezeichnet, sie befindet sich unterhalb des Schnittpunktes.
Wie rechnen Sie die obigen Mengen mit der Funktionsgleichung?
  Durch Auflösen nach x der Gleichung: $2.5 = 0.2x + 2$ resp. $2.5 = -0.4x + 5$.

Aufgabe 2:



Berechnen Sie mittels Nullstellen- und Scheitelpunkt-berechnungen die genauen Werte.

Aufgaben:

a) Bestimmen Sie die Nutzenschwelle und -grenze
b) Bestimmen Sie (x_{Gopt}; G_{max})
c) Bestimmen Sie (x_{Eopt}; E_{max})

Lösungen:

a) Es sind die Nullstellen von
   $G(x) = E(x) - K(x) = -1.17 \cdot x^2 + 9.9 \cdot x - 5$
   zu bestimmen:
   Also: Nutzenschwelle = 0,539 ME und Nutzengrenze = 7,922 ME.
b) Der Scheitelpunkt der Funktion G(x) ist
   S(4,23; 15,94)
   Somit ist die gewinnmaximale Menge 4,23 ME und der maximale Gewinn ist 15,94 GE
c) Scheitelpunkt der Funktion E(x) ist S(5; 25).
   Somit ist die Erlösmaximale Menge 5 ME und der maximale Erlös 25 GE

18. Textaufgaben

18.1. Mischungsaufgaben

Aus 2 oder mehr Komponenten mit unterschiedlichen Anteilen oder Preisen entsteht eine neue Mischung. So kann aus Spiritus mit unterschiedlichem Alkoholgehalt eine neue Spiritusmischung entstehen. Oder aus 2 Mehlsorten einsteht eine neue Brotsorte, die je nach Zusammensetzung einen Unterschiedlichen Preis hat.

Zur Lösung der Aufgabe müssen die Anteile der Komponenten berechnet und mit dem Anteil in der neuen Mischung gleichgesetzt werden.

a) Spiritus ist eine Mischung aus Alkohol und Wasser. Als Gehalt wird der Prozentsatz an Alkohol angegeben.
4 Liter Spiritus zu 75% Gehalt werden mit 8 Liter zu 60% gemischt.

Welchen Alkoholgehalt erhält die Mischung?

❶ Analyse

	Spiritus 1	Spiritus 2	Mischung
Menge	4 Liter	8 Liter	12 Liter
Gehalt in %	75%	60%	☐ %
Alkoholmenge	4 • 75%	8 • 60%	12 • ☐ %

❷ Alkohol in [Spiritus 1] + Alkohol in [Spiritus 2] = Alkohol der [Mischung]

❸ x = Gehalt der Mischung

❹ $\frac{4 \bullet 75}{100} + \frac{8 \bullet 60}{100} = \frac{12x}{100}$

❺ $D = \mathbb{Q}^{+}$

$\frac{4 \bullet 75}{100} + \frac{8 \bullet 60}{100} = \frac{12x}{100}$

$300 + 480 = 12x$

$780 = 12x$

$\underline{x = 65}$

❻ Der Gehalt der Mischung ist: **65%.**

❼ Probe:

Mischung Spiritus 4 Liter (75%)	300
Mischung Spiritus 8 Liter (60%)	<u>480</u>
Mischung Spiritus 12 Liter	<u>780</u>
Mischung Spiritus 12 Liter (65%)	<u>780</u> ☑

b) Ein Bäcker will eine neue Brotsorte kreieren. In einem ersten Versuch nimmt er 250g Vollkornmehl und 350g Dinkel, so kommt die Mehlmischung auf CHF 1.46 pro Brot. Beim zweiten Versuch mischt er 400g Vollkornmehl mit 200g Dinkel. Dies ergibt einen Mehlpreis von CHF 1.40 pro Brot.

Wie viel kosten die beiden Mehlsorten je Zentner?

❶ Analyse

	Situation 1			Situation 2		
	Vollkorn	Dinkel	Mischung	Vollkorn	Dinkel	Mischung
Menge in kg	0.25	0.35	0.6	0.4	0.2	0.6
Preis pro kg	□	○		□	○	
Mischungspreis	0.25 • □	0.35 • ○	1.46	0.4 • □	0.2 • ○	1.40

❷ (1) Mehlkosten [Vollkorn] + Mehlkosten [Dinkel] = Mehlkosten [Mischung 1]
(2) Mehlkosten [Vollkorn] + Mehlkosten [Dinkel] = Mehlkosten [Mischung 2]

❸ x = Preis Vollkornmehl pro kg
y = Preis Dinkelmehl pro kg

❹ (1) $0.25x + 0.35y = 1.46$
(2) $0.4x + 0.2y = 1.40$

❺ $D = \mathbb{Q}^{+} \times \mathbb{Q}^{+}$

(1) $0.25x + 0.35y = 1.46$
$x + 1.4y = 5.84$
$x = -1.4y + 5.84$

(2) $0.4x + 0.2y = 1.40$
$x + 0.5y = 3.5$
$x = -0.5y + 3.5$

Gleichungen gleichsetzen

$-1.4y + 5.84 = -0.5y + 3.5$
$2.34 = 0.9y$
$\underline{y = 2.60}$

Preis pro Zentner (= 100 kg):
$2.60 \cdot 100 = \underline{260.--}$

y einsetzen und x berechnen:

$x = -1.4 \cdot 2.60 + 5.84$
$x = -3.64 + 5.84$
$\underline{x = 2.20}$

Preis pro Zentner (= 100 kg):
$2.20 \cdot 100 = \underline{220.--}$

❻ 1 Zentner Vollkornmehl kostet **CHF 220.--**, 1 Zentner Dinkelmehl kostet **CHF 260.--**.

❼ Probe:

Kosten für 0.25 kg Vollkornmehl	0.25 • 2.20	0.55	
Kosten für 0.35 kg Dinkelmehl	0.35 • 2.60	+ 0.91	
Mischung 0.5 kg		1.46	☑
Kosten für 0.4 kg Vollkornmehl	0.4 • 2.20	0.88	
Kosten für 0.2 kg Dinkelmehl	0.2 • 2.60	+ 0.52	
Mischung 0.5 kg		1.40	☑

c) Messing ist eine Legierung (Mischung) aus Kupfer und Zink, deren Gehalt als Prozent von Kupfer angegeben wird.

Wie viel kg Zink muss man 10kg Kupfer sowie 8kg einer Messinglegierung von 75% Kupfer beimischen, dass die Legierung 60%ig wird?

❶ Analyse

	Kupfer	Messing	Zink	Legierung
Menge	10 kg	8 kg	☐ kg	18 + ☐ kg
Gehalt in %	100%	75%	0%	60 %
Gehalt in kg Kupfer	10 • 100%	8 • 75%	☐ • 0%	(18 + ☐) • 60%

❷ Kupfer in [Kupfer] + Kupfer in [Messing] + Kupfer in [Zink] = Kupfer in [Legierung]

❸ x = Anzahl kg Zink

❹ $$\frac{10 \bullet 100}{100} + \frac{8 \bullet 75}{100} + \frac{x \bullet 0}{100} = \frac{(18 + x) \bullet 60}{100}$$

❺ $D = \mathbb{Q}^{+}$

$1'000 + 600 + 0 = 60(18 + x)$

$1'600 = 1'080 + 60x$

$520 = 60x$

$x = \underline{x = 8\frac{2}{3}}$

d) Eine Kosmetikerin stellt eine neue Handsalbe her, dazu benutzt sie 2 Komponenten. Zuerst mischt sie die Komponenten im Verhältnis 3:4, dann nimmt sie von der ersten Komponente 50% mehr als von der zweiten.
1kg der ersten Komponente kostet CHF 52.-. Bei den beiden Mischungen stellt sie fest, dass die zweite CHF 1.80 teurer wird.

Wie viel kostet 1kg der zweiten Komponente, und wie teuer werden die beiden Salben pro 250g?

❶ Analyse

	Situation 1			Situation 2		
	Komp. 1	Komp. 2	Mischung	Komp. 1	Komp. 2	Mischung
Kosten / kg	52	□	○	52	□	○ + 1.80
Menge in kg	3	4	7	1.5	1	2.5
Kosten	3 • 52	4 • □	7 • ○	1.5 • 52	1 • □	2.5 (○ + 1.80)

❷ (1) Kosten [Komponente 1] + Kosten [Komponente 2] = Kosten [Mischung 1]
(2) Kosten [Komponente 1] + Kosten [Komponente 2] = Kosten [Mischung 2]

❸ x = Kosten der Komponente 2 pro kg
y = Kosten der Mischung 1 pro kg

❹ (1) $3 \cdot 52 + 4x = 7y$
(2) $1.5 \cdot 52 + 1x = 2.5\,(y + 1.80)$

❺ $D = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$

(1) $156 + 4x = 7y$
$39 + x = 1.75y$ → $x = -39 + 1.75y$

(2) $1.5 \cdot 52 + 1x = 2.5\,(y + 1.80)$
$78 + 1x = 2.5y + 4.5$
$73.5 + x = 2.5y$ → $x = -73.5 + 2.5y$

Gleichsetzungsverfahren	x berechnen: y in (1) einsetzen
$-39 + 1.75y = -73.5 + 2.5y$	$x = -39 + 1.75y$
$34.5 = 0.75y$	$x = -39 + 1.75 \cdot 46$
$\underline{y = 46}$	$\underline{x = 41.50}$

Kosten Versuch 1:

y = 46 (Kosten Mischung pro kg) → 46 : 4 = <u>11.50</u> (pro 250 g)

Kosten Versuch 2:

46 + 1.80 = 47.80/kg → 47.80 : 4 = <u>11.95</u> (pro 250 g)

❻ 1 kg der zweiten Komponente kostet **CHF 41.50**.
Die erste Salbe kostet pro 250 g **CHF 11.50**, die zweite Salbe **CHF 11.95**.

18.2. Arbeit / Leistung

Arbeit und Leistung sind klar definierte physikalische Begriffe.

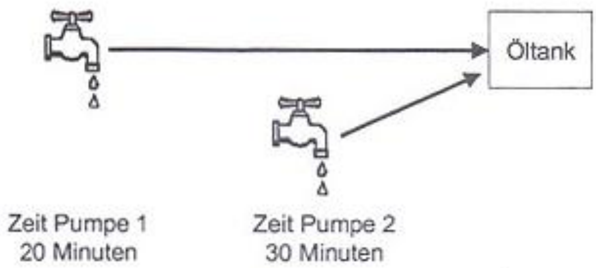
- Mit Arbeit meint man das Ausführen einer Tätigkeit, die in einer bestimmten Zeit erledigt wird.
- Der Begriff der Leistung macht die Arbeit in quantitativer Hinsicht vergleichbar: Leistung ist die Arbeit pro Zeiteinheit (z.B. Arbeit pro Tag, pro Stunde etc.).

Ausgehend von der Leistung kann die Arbeit als Leistung mal Zeit definiert werden.

a) Ein Öltank wird durch zwei Pumpen gefüllt. Wenn nur die erste eingeschaltet ist, dauert die gesamte Tankfüllung 20 Minuten, wenn nur die zweite eingeschaltet ist, dauert sie 30 Minuten.

Wie lange dauert die gesamte Tankfüllung, wenn beide Pumpen gleichzeitig eingeschaltet sind?

❶ Analyse



	Pumpe 1: **allein**	Pumpe 2: **allein**	Pumpe1 und 2 **zusammen**
Arbeit	Öltank (1)	Öltank (1)	Öltank (1)
Zeit	20 Minuten	30 Minuten	?
Leistung pro Minute	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{?}$
Arbeit bis zur Füllung	$\frac{1}{20} \cdot ?$	$\frac{1}{30} \cdot ?$	Öltank (1)

❷ Summe der Einzelleistung = Gesamtleistung

❸ x = Zeit, wenn beide Pumpen eingeschaltet sind

❹ Leistung: $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{x}$ oder Arbeit: $\frac{x}{20} + \frac{x}{30} = 1$

❺ $D = \mathbb{Q}^+$

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{x}$$
$$3x + 2x = 60$$
$$5x = 60$$
$$\underline{x = 12}$$

❻ Mit beiden Pumpen dauert die Tankfüllung **12 Minuten**.

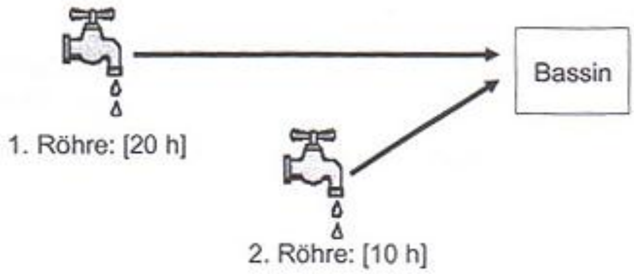
❼ Probe:

Pumpe 1	$\frac{12}{20}$	$\left(=\frac{36}{60}\right)$
Pumpe 2	$\frac{12}{30}$	$\left(=\frac{24}{60}\right)$
Total	$\underline{1}$ ☑	

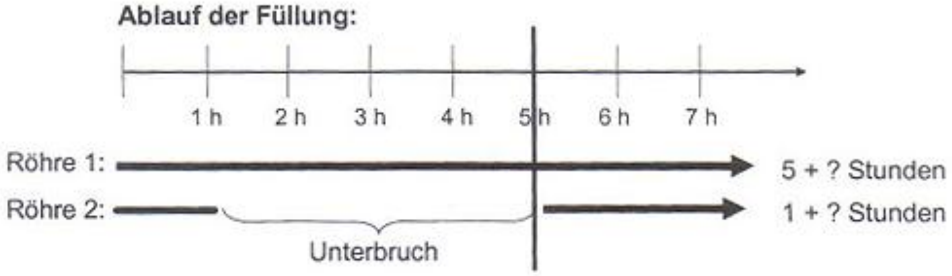
b) Ein Schwimmbassin wird durch 2 Zufluss Röhren gefüllt. Alleine benötigt die 1. Röhre 20 Stunden, die 2. Röhre 10 Stunden zur Füllung des gesamten Bassins. Nachdem nun aus beiden Röhren 1 Stunde Wasser einläuft, wird die 2. Röhre für 4 Stunden geschlossen.

Wie lange müssen nachher beide Röhren noch offen sein, bis die Hälfte des Bassins gefüllt ist?

❶ Analyse



Ablauf der Füllung:



	Röhre 1: **allein**	Röhre 2: **allein**	Röhre1 und 2 **zusammen**
Arbeit	$\boxed{\text{Bassin}}$ (1)	$\boxed{\text{Bassin}}$ (1)	$\boxed{\text{Bassin}}$ (1)
Zeit	20 Stunden	10 Stunden	?
Leistung pro Stunde	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{?}$
Geleistete Arbeit bis 5 h	$\frac{5}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$
Noch zu leistende Arbeit	$\frac{?}{20}$	$\frac{?}{10}$	$\frac{1}{2} - \frac{7}{20} = \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}\right)$

❷ Summe der Einzelleistung = Gesamtleistung

❸ x = Zeit des gemeinsamen Füllens

❹ $\frac{x}{20} + \frac{x}{10} = \frac{3}{20}$

❺ $D = \mathbb{Q}^+$

$\frac{x}{20} + \frac{x}{10} = \frac{3}{20} \quad \Rightarrow \quad x + 2x = 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 1}$

❻ Beide Röhren zusammen müssen noch **1 Stunde** offen sein.

❼ Probe:

Röhre 1	$\frac{5+1}{20}$	$\left(= \frac{6}{20}\right)$
Röhre 2	$\frac{1+1}{10}$	$\left(= \frac{4}{20}\right)$
Total	$\underline{\underline{\frac{10}{20} = \frac{1}{2}}}$	☑

c) Eine Arbeit wird von 2 Maschinen erledigt. Maschine A erledigt die Arbeit alleine in 30 Minuten, Maschine B alleine in 18 Minuten.

Wann ist die Arbeit erledigt, wenn beide Maschinen um 14 Uhr in Betrieb genommen werden?

❶ Analyse

	Maschine 1: **allein**	Maschine 2: **allein**	Maschine1 + 2 **zusammen**
Arbeit	Arbeit (1)	Arbeit (1)	Arbeit (1)
Zeit	30 Minuten	18 Minuten	?
Leistung pro Minute	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{?}$
Arbeit bis Erledigung	$\frac{1}{30} \cdot ?$	$\frac{1}{18} \cdot ?$	Arbeit (1)

❷ Summe der Leistung pro Maschine = Gesamtleistung

❸ x = Zeit, wenn beide Maschinen eingeschaltet sind

❹ $\frac{1}{30} + \frac{1}{18} = \frac{1}{x} \qquad | \cdot 90x$

❺ $D = \mathbb{Q}^+$

$3x + 5x = 90$
$8x = 90$
$\underline{x = 11.25}$

❻ Sind beide Maschinen eingesetzt, ist die Arbeit um **14 Uhr und 11 Minuten und 15 Sekunden** erledigt.

d) Ein Schwimmbassin kann durch 3 Abflussröhren in 2 Stunden vollständig geleert werden.

Wie lange hätte jeder der drei Röhren alleine, das gesamte Bassin zu entleeren, wenn die erste Röhre 2 Stunden länger hat als die zweite Röhre, aber nur halb so lange wie die 3. Röhre?

❶ Analyse

	Röhre 1: **allein**	Röhre 2: **allein**	Röhre 3: **allein**	Röhren **zusammen**
Arbeit	Bassin (1)	Bassin (1)	Bassin (1)	Bassin (1)
Zeit	x + 2 Stunden	x Stunden	2 (x + 2) Std.	2 Stunden
Leistung pro Stunde	$\frac{1}{x+2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2(x+2)}$	$\frac{1}{2}$
Arbeit bis Leerung	$\frac{1}{x+2} \bullet 2$	$\frac{1}{x} \bullet 2$	$\frac{1}{2(x+2)} \bullet 2$	Bassin (1)

❷ Summe der Leistung pro Röhre = Gesamtleistung

❸ x = Zeit in Stunden, die die 2. Röhre alleine zur Leerung braucht

❹ $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+2)} = \frac{1}{2} \qquad | \bullet 2x(x+2)$

❺ $D = \mathbb{Q}^+ \setminus \{0, -2\}$

$2x + 2(x+2) + x = x(x+2)$

$2x + 2x + 4 + x = x^2 + 2x$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_{1,2} = -\left(\frac{-3}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - (-4)}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{6.25}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm 2.5$

$x_1 = \underline{4}, \quad x_2 = \underline{-1}$

❻ Die Zeit einer Röhre alleine ist: 1. Röhre: **6 Std.**, 2. Röhre: **4 Std.**, 3. Röhre: **12 Std.**

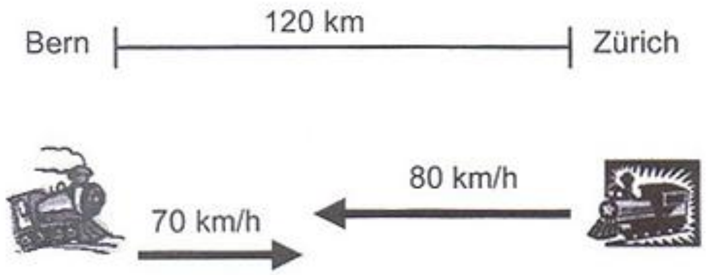
18.3. Bewegung

Bewegungsberechnungen bei konstanter Geschwindigkeit basieren auf folgender Grundformel:
Strecke = Geschwindigkeit * Zeit => s = v * t

a) Die Strecke von Bern nach Zürich misst 120km. Von beiden Hauptbahnhöfen fahren gleichzeitig zwei Züge zur jeweils anderen Stadt. Der Zug von Bern legt in der Stunde 70km, der Zug von Zürich 80km zurück.

Nach welcher Zeit und in welcher Entfernung von Zürich kreuzen sich die beiden Züge?

❶ Analyse



		Zug von Bern	Zug von Zürich
Geschwindigkeit	**v**	70 km/h	80 km/h
Zeit	**t**	🕒	🕒
Strecke	**s**	🕒 • 70	🕒 • 80
Gesamtstrecke		120 km	

❷ Die zurückgelegte Strecke der beiden Züge beim Kreuzungspunkt = 120 km

❸ x = Zeit in Stunden bis zum Kreuzungspunkt

❹ $70x + 80x = 120$

❺ $D = \mathbb{Q}^+$

$70x + 80x = 120$
$150x = 120$
$\underline{x = 0.8}$

$0.8\ h \Rightarrow 60 \cdot 0.8 = \underline{48\ \text{Minuten}}$

Entfernung von Zürich:
$80 \cdot 0.8 = \underline{64\ \text{km}}$

❻ Nach **48 Minuten** treffen sich die beiden Züge **64 km** von Zürich entfernt.

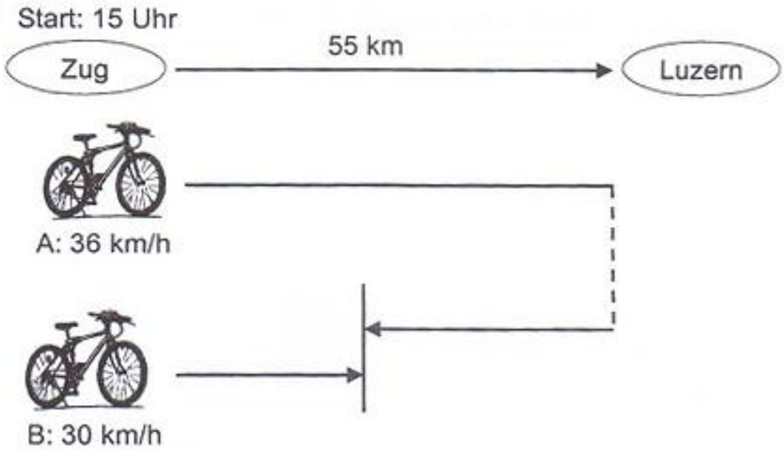
❼ Probe:

Strecke Zug von Bern	$70 \cdot 0.8$	(= 56)
Strecke Zug von Zürich	$\underline{80 \cdot 0.8}$	(= 64)
Total	$\underline{120\ \text{km}}$	☑

b) Ein Radrennen führt von Zug über Luzern und auf der gleichen Strecke zurück nach Zug. Der Start ist um 15 Uhr. Die Radstrecke zwischen den beiden Orten beträgt 55km. Radfahrer A fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 36km/h, Radfahrer B mit einer Geschwindigkeit von 30km/h. Nachdem Radfahrer A in Luzern gewendet hat, kreuzt er auf dem Rückweg Radfahrer B.

Wann und wo findet dies statt?

❶ Analyse



		Radfahrer A	Radfahrer B
Geschwindigkeit	**v**	36 km/h	30 km/h
Zeit	**t**	🕒	🕒
Strecke	**s**	🕒 • 36	🕒 • 30
Gesamtstrecke		55 km • **2**	

❷ Die zurückgelegte Strecke beider Radfahrer = **2 • die Gesamtstrecke**

❸ x = Zeit in Stunden bis zur Begegnung

❹ $36x + 30x = 2 \cdot 55$

❺ $D = \mathbb{Q}^+$

$36x + 30x = 110$
$66x = 110$
$\underline{x = 1\tfrac{2}{3}}$

$1\tfrac{2}{3}\,h \Rightarrow 60 \cdot 1\tfrac{2}{3} = 100$ Minuten $\Rightarrow$ <u>1 Stunde 40 Minuten</u>

Entfernung:

$30 \cdot 1\tfrac{2}{3} = \underline{50\text{ km}}$

❻ 1 Stunde und 40 Minuten nach Start des Rennens (also um **16 Uhr 40 Minuten**) kreuzen sich Radfahrer A und B.
Radfahrer B ist beim Zusammentreffen **50 km** von Zug oder 5 km von Luzern entfernt.

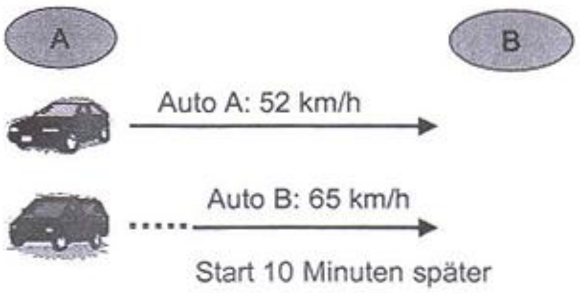
❼ Probe:

Strecke Radfahrer A	$36 \cdot 1\tfrac{2}{3}$	(= 60)
Strecke Radfahrer B	$\underline{30 \cdot 1\tfrac{2}{3}}$	(= 50)
Total	$\underline{110\text{ km}}$	☑

c) Zwei Autos fahren von A nach B. Auto A fährt mit einer Geschwindigkeit von 52km/h, Auto B mit einer Geschwindigkeit von 65km/h. 10 Minuten nach Abfahrt von Auto A fährt auch Auto B los.

Nach welcher Zeit holt Auto B Auto A ein und wie viele Kilometer vom Standort weg findet die Überholung statt?

❶ Analyse



	Auto A	Auto B
Geschwindigkeit v	52 km/h	65 km/h
Zeit t	☐ + 10 Minuten (= ☐ + $\frac{10}{60}$ Std. ➔ ☐ + $\frac{1}{6}$ Std.)	☐ Minuten
Strecke s	52 • (☐ + $\frac{1}{6}$)	65 • ☐
Gesamtstrecke	? km	

❷ Die zurückgelegte Strecke von Auto A = die zurückgelegte Strecke von Auto B

❸ x = Zeit in Stunden von Auto B bis zur Überholung

❹ $52\left(x+\frac{1}{6}\right) = 65x$

❺ $D = \mathbb{Q}^+$

$52\left(x+\frac{1}{6}\right) = 65x \qquad | \cdot 6$

$312x + 52 = 390x \qquad | - 312x$

$52 = 78x \qquad | : 78$

$\underline{x = \frac{52}{78} = \frac{2}{3}}$

$\frac{2}{3}$ h $\Rightarrow 60 \cdot \frac{2}{3} = \underline{40 \text{ Minuten}}$

➔ Fahrzeit Auto B: 40 Minuten $\left(=\frac{2}{3}\right)$

➔ Fahrzeit Auto A: 50 Minuten $\left(=\frac{5}{6}\right)$

Entfernung von Ort A:

$65 \cdot \frac{2}{3} = \underline{43\frac{1}{3} \text{ km}}$

❻ Nach einer Fahrzeit von **40 Minuten** resp. $43\frac{1}{3}$ km hat Auto B Auto A überholt.

19. Änderungen

19.1. Änderungen der Version 2011-06-25 zur Version 2011-11-11

S. 5 Zusatz mit „=" …….
S. 13 Kleinigkeiten in Tabelle zur Wurzelrechnung geändert
S. 14 Vertauschungsgesetz mit … = a ergänzt
S. 16 Tabelle mit den Gesetzen überarbeitet
S. 20 Anpassung von V4) und D4) an die Zeichnung (Fall 2)
S. 21 Fehler in der Def. der Produktmenge behoben, sowie „mathematisch" überall gross geschrieben
S. 23 Fehler in Musterbeispiel behoben
S. 24 Fehler in Musterbeispiel 3 behoben
S 34/35 L4 ist falsch, es muss heissen: $L_4 = \left\{-\left(\sqrt[n]{-a}\right)\right\} = \left\{-\left(\sqrt[n]{|a|}\right)\right\}$
S. 38 Fehler in Musterbeispiel 2 behoben und Musterbeispiel 4 ergänzt
S. 39 Wurzelgleichung in Aufgabe 1 vervollständigt
S. 47 Der letzte Umwandlungsschritt der blauen Hyperbel war falsch
S. 50 Aufgabe eingefügt
S. 54 Aufgabe 1 eine 2. Lösungsvariante eingefügt
S. 58 Anzahl Nullstellen einer quadratischen Funktion und kleiner in Aufgabe 11 behoben
S. 74 Zu IV) $a_3 = 1;\ a_2 = 2;\ a_1 = -13 \text{ und } a_0 = 10$
S. 81 In II) (Punktspiegelung im Nullpunkt)
S. 81 Gerade Funktion: Beispiel fertig gemacht
S. 81 Ungerade Funktion: Klammer gesetzt: = (-1) · $(3x^5 – 7x^3 + 7x)$ = (-1) · f(x)
S. 81 Satz zu den senkrechten Asymptoten geändert.
S. 82 Schreibfehler in iii) eine Hyperbel
S. 83 Schreibfehler in (*) y = g(x) = $(x + c)^2$
S. 103 Schreibfehler 4. Zeile: Wo findet dies statt?